МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ «РОСТОВСКИЙ-НА-ДОНУ КОЛЛЕДЖ СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ»

Фонд оценочных средств

по учебной дисциплине

ОП.04 «Численные методы»

программы подготовки специалистов среднего звена

по специальности

09.02.13 «Интеграция решений с применением технологий искусственного интеллекта»

(базовой подготовки)

г. Ростов-на-Дону, 2026 г.

РАССМОТРЕНО
на заседании цикловой комиссии
Программирование
Протокол № 1 от 31.08.2026 года
Председатель ЦК Сулавко С.Н.

УТВЕРЖДАЮ:
Зам. директора по УМР
И.В. Подцатова
«16» ноября 2026 г.

Фонд оценочных средств разработан на основе рабочей программы дисциплины ОП.04 «Численные методы», разработанной по специальности 09.02.13 «Интеграция решений с применением технологий искусственного интеллекта».

Разработчик: Арутюнян М.М. – преподаватель государственного бюджетного профессионального образовательного учреждения Ростовской области «Ростовский-на-Дону колледж связи и информатики»

СОДЕРЖАНИЕ

1. Паспорт фонда оценочных средств 4
2. Результаты освоения дисциплины, подлежащие проверке 5
3. Оценка освоения учебной дисциплины 8
4. Контрольно-оценочные материалы для промежуточной аттестации по учебной дисциплине. 68

1. Паспорт фонда оценочных средств

В результате освоения учебной дисциплины ОП.04 «Численные методы» обучающийся должен обладать предусмотренными ФГОС СПО по специальности 09.02.13 «Интеграция решений с применением технологий искусственного интеллекта» следующими умениями, знаниями и владеть навыками:

Код ОК, ПК	**Уметь**	**Знать**	**Владеть навыками**
ОК.01	Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам	Методы и подходы решения задач профессиональной деятельности	-
ОК.02	Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии	Основы информационных технологий, методы анализа и интерпретации данных	-
ОК.03	Планировать и реализовывать профессиональное и личностное развитие, использовать знания правовой и финансовой грамотности	Основы предпринимательства, правовой и финансовой грамотности, подходы к личностному развитию	-
ОК.04	Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде	Основы командной работы, принципы эффективного взаимодействия	-
ОК.05	Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации	Особенности государственного языка Российской Федерации, правила деловой коммуникации	-
ОК.06	Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение	Основы духовно-нравственных ценностей, принципы антикоррупционного поведения	-
ОК.07	Содействовать сохранению окружающей среды, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях	Основы экологии, принципы бережливого производства, методы действий в ЧС	-
ОК.08	Использовать средства физической культуры для поддержания здоровья	Основы физической культуры и здоровья, методы поддержания физической формы	-
ОК.09	Пользоваться профессиональной документацией на	Основы ведения профессиональной документации на разных	-

	государственном и иностранном языках	языках	
ПК 3.1	Анализировать задачи для выбора подходящих готовых моделей ИИ, учитывать их ограничения и возможности	Основы методов машинного обучения, принципы работы готовых моделей ИИ, их виды и применения. Языки программирования, используемые для ИИ (Python, R)	Подбирать и настраивать готовые модели ИИ с учетом поставленных задач, анализировать результаты их применения
ПК 3.2	Разрабатывать сценарии обучения, определять параметры обучения для различных типов моделей ИИ.	Методы и стратегии обучения моделей, типы данных для обучения, методы предварительной обработки данных	Создание сценариев обучения, подготовка данных для обучения, настройка гиперпараметров для достижения оптимального результата

Формой аттестации в соответствии с рабочей программой по учебной дисциплине ОП.04 «Численные методы» является экзамен.

2. Результаты освоения учебной дисциплины, подлежащие проверке

2.1. В результате аттестации по учебной дисциплине ОП.04 «Численные методы» осуществляется комплексная проверка следующих умений и знаний:

Таблица 1

Результаты обучения	Показатели освоенности компетенций	Методы оценки
Знает: − Методы и подходы решения задач профессиональной деятельности − Основы информационных технологий, методы анализа и интерпретации данных − Основы предпринимательства, правовой и финансовой грамотности, подходы к личностному развитию − Основы командной работы, принципы эффективного взаимодействия − Особенности государственного языка Российской Федерации,	Демонстрирует знания: − методов и подходов решения задач профессиональной деятельности; − основ информационных технологий, методов анализа и интерпретации данных; − основ предпринимательства, правовой и финансовой грамотности, подходов к личностному развитию; − основ командной работы, принципов эффективного взаимодействия; − особенностей государственного языка Российской Федерации, правил деловой коммуникации; − основ духовно-нравственных ценностей, принципов антикоррупционного	*Экспертное наблюдение выполнения практических работ и видов работ по практике* *Диагностика* *Экзамен*

правила деловой коммуникации − Основы духовно-нравственных ценностей, принципы антикоррупционного поведения − Основы экологии, принципы бережливого производства, методы действий в ЧС − Основы физической культуры и здоровья, методы поддержания физической формы − Основы ведения профессиональной документации на разных языках − Основы методов машинного обучения, принципы работы готовых моделей ИИ, их виды и применения. Языки программирования, используемые для ИИ (Python, R) − Методы и стратегии обучения моделей, типы данных для обучения, методы предварительной обработки данных Умеет: − Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам − Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии − Планировать и реализовывать профессиональное и личностное развитие, использовать знания правовой и финансовой грамотности − Эффективно взаимодействовать и работать	поведения; − основ экологии, принципов бережливого производства, методов действий в чрезвычайных ситуациях; − основ физической культуры и здоровья, методов поддержания физической формы; − основ ведения профессиональной документации на разных языках; − основ методов машинного обучения, принципов работы готовых моделей искусственного интеллекта, их видов и областей применения, языков программирования, используемых для разработки искусственного интеллекта (Python, R) − методов и стратегий обучения моделей, типов данных для обучения и методов предварительной обработки данных. Демонстрирует умения: – выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам; – использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, а также информационные технологии; − планировать и реализовывать профессиональное и личностное развитие, применять знания правовой и финансовой грамотности; − эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде; − осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации; − проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение; − содействовать сохранению окружающей среды, эффективно действовать в чрезвычайных	

в коллективе и команде − Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации − Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение − Содействовать сохранению окружающей среды, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях − Использовать средства физической культуры для поддержания здоровья − Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках − Анализировать задачи для выбора подходящих готовых моделей ИИ, учитывать их ограничения и возможности − Разрабатывать сценарии обучения, определять параметры обучения для различных типов моделей ИИ.	ситуациях; − использовать средства физической культуры для поддержания здоровья; − пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках; − анализировать задачи для выбора подходящих готовых моделей искусственного интеллекта с учётом их возможностей и ограничений, − разрабатывать сценарии обучения и определять параметры обучения для различных типов моделей искусственного интеллекта.	

3. Оценка освоения учебной дисциплины:

3.1. Формы и методы оценивания

Предметом оценки служат умения и знания, предусмотренные рабочей программой по дисциплине ОП.04 «Численные методы».

Технология оценки знаний и умений по дисциплине соответствует Положению о формах, периодичности и порядке проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в ГБПОУ РО «РКСИ».

Контроль и оценка освоения учебной дисциплины по темам (разделам)

Таблица 2

Элемент учебной дисциплины	**Текущий контроль**		**Промежуточная аттестация**	
	Форма контроля (по темам)	**Проверяемые ОК, ПК**	**Форма контроля (**по разделам**)**	**Проверяемые ОК, ПК**
Раздел 1. Введение в численные методы				
Тема 1.1. Основные задачи численных методов	практические занятия №1, 2	ОК.01-ОК.09, ПК 3.1, ПК 3.2		
Тема 1.2. Линейные уравнения и системы уравнений	практические занятия №3, 4	ОК.01-ОК.09, ПК 3.1, ПК 3.2		
Тема 1.3. Нелинейные уравнения	практические занятия №5, 6	ОК.01-ОК.09, ПК 3.1, ПК 3.2		
Раздел 2. Интерполяция и аппроксимация данных				
Тема 2.1. Полиномиальная интерполяция	практическое занятие №7	ОК.01-ОК.09, ПК 3.1, ПК 3.2		
Тема 2.2. Аппроксимация функций	практические занятия №8, 9	ОК.01-ОК.09, ПК 3.1, ПК 3.2		
Раздел 3. Численное дифференцирование и интегрирование				
Тема 3.1. Численное дифференцирование	практическое занятие №10	ОК.01-ОК.09, ПК 3.1, ПК 3.2		
Тема 3.2. Численное интегрирование	практическое занятие №11	ОК.01-ОК.09, ПК 3.1, ПК 3.2		
Раздел 4. Численные методы решения дифференциальных уравнений				
Тема 4.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ)	практические занятия №12, 13	ОК.01-ОК.09, ПК 3.1, ПК 3.2		
Тема 4.2. Краевые задачи	практическое занятие №14	ОК.01-ОК.09, ПК 3.1, ПК 3.2		
Раздел 5. Численные методы для оптимизации				

Тема 5.1. Градиентные методы оптимизации	практические занятия №15, 16	ОК.01-ОК.09, ПК 3.1, ПК 3.2		
Тема 5.2. Методы многомерной оптимизации	практические занятия №17, 18	ОК.01-ОК.09, ПК 3.1, ПК 3.2		
			Экзамен	ОК.01-ОК.09, ПК 3.1, ПК 3.2

3.2. Задания для оценки освоения учебной дисциплины

3.2.1. Задания для оценки знаний и умений в ходе проведения текущего контроля

Раздел 1. Введение в численные методы
Тема 1.1. Основные задачи численных методов

Практическое занятие №1

Решение линейных уравнений с использованием численных методов. Сравнение численных и аналитических решений для простых задач

Проверяемые компетенции:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях;

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде;

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста;

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях;

ОК 08. Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности;

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках;

ПК 3.1 Осуществлять выбор готовых моделей искусственного интеллекта;

ПК 3.2 Формировать сценарии обучения готовых моделей искусственного интеллекта.

Метод половинного деления (метод бисекции)

Метод половинного деления — это простой и надежный метод для нахождения корней функции на заданном интервале, который основывается на принципе промежуточного значения.

Алгоритм:

1. Выберите начальный интервал $[a, b]$, такой что $f(a) \cdot f(b) < 0$.
2. Вычислите середину интервала: $c = \frac{a+b}{2}$.
3. Если $f(c) = 0$ или $\frac{b-a}{2} < \varepsilon$ (где ε — заданная точность), то c — приближенное значение корня.
4. Если $f(a) \cdot f(c) < 0$, то замените b на c.
5. Если $f(c) \cdot f(b) < 0$, то замените a на c.
6. Повторяйте шаги 2–5 до достижения заданной точности.

Вариант 1

Найти корень уравнения $x^2 - 2 = 0$ на интервале $[1,2]$ с точностью $\varepsilon = 0.0001$.

Вариант 2

Решить уравнение $\cos x - x = 0$ на интервале $[0,1]$ с точностью $\varepsilon = 0.001$.

Вариант 3

Найти корень уравнения $e^x - 3x = 0$ на интервале $[0,1]$ с точностью $\varepsilon = 0.0001$.

Вариант 4

Решить уравнение $\ln x + x2 = 0$ на интервале $[0.5,1]$ с точностью $\varepsilon = 0.001$.

Вариант 5

Найти корень уравнения $x^3 - 3x + 1 = 0$ на интервале $[1,2]$ с точностью $\varepsilon = 0.0001$.

Вариант 6

Решить уравнение $\sin x - 0.5 = 0$ на интервале $[0, \pi]$ с точностью $\varepsilon = 0.001$.

Вариант 7

Найти корень уравнения $x^3 - x^2 - 1 = 0$ на интервале $[1,2]$ с точностью $\varepsilon = 0.0001$.

Вариант 8

Решить уравнение $x - e^{-x} = 0$ на интервале $[0,1]$ с точностью $\varepsilon = 0.001$.

Вариант 9

Найти корень уравнения $\operatorname{tg} x - x = 0$ на интервале $[0, \frac{\pi}{2}]$ с точностью$\varepsilon = 0.0001$.

Вариант 10

Решить уравнение $x^5 - x - 1 = 0$ на интервале $[1,2]$ с точностью $\varepsilon = 0.001$.

Критерий оценки

«5»	«4»	«3»	«2»
Решение верно, отчет оформлен верно по всем пунктам	Решение верно, отчет оформлен верно не по всем пунктам	Решение верно, отчет не оформлен	Решение неверно

Практическое занятие № 2

Применение численных методов для решения инженерных задач

Проверяемые компетенции:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях;

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде;

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста;

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях;

ОК 08. Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности;

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках;

ПК 3.1 Осуществлять выбор готовых моделей искусственного интеллекта;

ПК 3.2 Формировать сценарии обучения готовых моделей искусственного интеллекта.

Метод итераций

В ряде случаев весьма удобным приемом решения уравнений является ***метод итераций (повторений)***. Для применения этого метода исходное уравнение нужно записывать в форме

$$x=\varphi(x). \qquad (1)$$

Пусть каким-либо способом выделен интервал $[a,b]$ изоляции корня этого уравнения и x_0—любая точка этого интервала (нулевое приближение). Для получения следующего приближения x_1 в правую часть уравнения (1) вместо x подставляем значение x_0, так что

$$x_1=\varphi(x_0).$$

Следующие приближения получаются по схеме

$$X_2 = \varphi(x_1),$$
$$X_3 = \varphi(x_2),$$
$$\dots$$
$$X_n= \varphi(x_n),$$

Если последовательность $x_1, x_2, \dots x_n, \dots$ имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, то x является корнем уравнения (1).

Поэтому одно из значений x_n с достаточно большим номером можно принять за приближенное значение корня. Однако может случиться, что последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ не имеет предела, и тогда метод итераций не приводит к цели.

Представляет большой интерес выяснить условия, при которых итерационный процесс сходится. Имеет место следующая теорема.

Теорема. Пусть интервал [a, b] является интервалом изоляции корня уравнения $x=\varphi(x)$ и во всех точках этого интервала производная $\varphi'(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|\varphi'(x)|\le M<1 \qquad (2)$$

Если при этом выполняется условие $a \le \varphi(x) \le b$, то итерационный процесс сходится, причем за нулевое приближение x_0 можно брать *любую* точку интервала $[a, b]$.

Пример. Решим методом итераций уравнение $4x-5\cdot\ln(x)=5$.

Решение: Записав уравнение в форме $\ln(x)=4x-5$ ищем «нулевое приближение» графически, находя пересечение логарифмической кривой с прямой $y=4/5x-1$ (сделать самостоятельно). Находим два приближенных значения корня: $x_0 == 2{,}28$ и $x_0 = 0{,}57$, которые и принимаем за нулевое приближение.

Для более точного отыскания правого корня запишем уравнение в виде

$$x=\varphi(x)=1{,}25(1+\ln(x))$$

Итерационный процесс сходится, так как:

$$\varphi'(x)=(1.25\cdot 1)'+(1.25\cdot\ln(x))=0+1.25\cdot(\ln(x))'=1.25\cdot\frac{1}{x}=\frac{1.25}{x}$$

что в окрестности правого корня положительно и меньше единицы:

$$\varphi'(2.28)=\frac{1.25}{2.28}=0{,}54824561403508771929824561403509\approx 0{,}54825$$, т.е.

$$|\varphi'(2.28)|\approx|0{,}54825|<1$$

Вычисления приведены в таблице 1:

Табл.1.

(*)	(**)	(***)
x	1n (*)+1	1,25·(**)
2,28	1,82418	2,28022
2,28022	1,82427	2,28034
2,28034	1,82432	2,28040
2,28040	1,82435	2,28044
2,28044	1,82437	2,28045
2,28046	1,82438	2,28048
- 2,28048	1,82439	2,28049
2,28049	1,82439	2,28049

Для отыскания корня с точностью до пяти знаков потребовалось восемь шагов. Такую скорость сходимости можно считать достаточно хорошей. Она объясняется, во-первых, тем, что производная вблизи корня достаточно мала (около 0,55), а во-вторых, удачным выбором нулевого приближения.

При отыскании левого корня итерационный процесс оказывается расходящимся, потому что здесь:

$$\varphi'(0.57)=\frac{1.25}{0.57}=2{,}19298245614035087719298245614\approx 2{,}19298$$,

т.е.

$$|\varphi'(0.57)|\approx|2{,}19298|>1$$

Поэтому первоначальное уравнение следует переписать иначе:

$$x=\varphi(x)=e^{0{,}8x-1},$$

Здесь производная тоже положительна и меньше единицы (около 0,46), так что итерационный процесс сходится:

$$\varphi'(x)=\left(e^{0.8x-1}\right)'=(0.8x-1)'_x\cdot\left(e^u\right)'_u,\quad \text{ăäĺ}$$
$$u=u(x)=0.8x-1,\quad \text{ň .Í. } \varphi[u(x)]-\text{ńëîćíŕ˙}\quad \text{ôóíęöč˙}$$

т.е.

$$\varphi'(x)=\left(e^{0.8x-1}\right)'=(0.8x-1)'_x\cdot\left(e^u\right)'_u=0.8\cdot e^u=0.8\cdot e^{0.8x-1}$$
$$\varphi'(0.57)=0.8\cdot e^{0.8\cdot 0.57-1}=0.8\cdot e^{-0,544}=-0,4352,$$
$$\left|\varphi'(0.57)\right|=\left|-0,4352\right|<1$$

Как показывают вычисления, приведенные в табл. 2, для отыскания корня с точностью до пяти знаков после запятой требуется уже одиннадцать шагов. Такую скорость также можно считать достаточной. Здесь процесс сходится медленнее, чем в предыдущем случае, хотя производная и меньше.

Табл.2.

(*)	(**)	(***)	(****)
x	***0,8·(*)***	***(**) – (*)***	$e^{(***)}$
0,57	0,456	-0,555	0,58042
0,58042	0,46434	-0,53566	0,58528
0,58528	0,46822	-0,53178	0,58756
0,58756	0,47005	-0,52995	0,58863
0,58863	0,47090	-0,52910	0,58913
0,58913	0,47130	-0,52870	0,58937
0,58937	0,47150	-0,52850	0,58949
0,58949	0,47159	-0,52841	0,58954
0,58954	0,47163	-0,52837	0,58957
0,58957	0,47166	-0,52834	0,58958
0,58958	0,47166	-0,52834	0,58958

Причиной замедления является менее удачный,чем ранее, выбор нулевого приближения. Если в первом случае нулевое приближение отличалось от истинного корня на величину порядка 10^{-4}, то во втором случае—на величину порядка 10^{-2}.

Варианты заданий

Вариант №1	***Вариант №2***	***Вариант №3***
$2^x+x^2-3=0$	$x^2-\cos(x)=0$	$2x^2-5x+3=0$
Вариант №4	***Вариант №5***	***Вариант №6***
$x^2-3x+2=0$	$-x^2+6x-5=0$	$x^2-x-2=0$

Вариант №7	***Вариант №8***	***Вариант №9***
$\cos(x)-x^2+3=0$	$x^2-\sin(x)=0$	$\sqrt{x}=\lvert x-2\rvert$
Вариант №10	***Вариант №11***	***Вариант №12***
$2^x-6+x=0$	$x^2-\frac{2}{x}=0$	$\log_2(x)-\frac{2}{x}=0$
Вариант №13	***Вариант №14***	***Вариант №15***
$\cos(x)-\frac{1}{2}=0$	$5-x-\frac{4}{x}=0$	$\lg(x)-x+3=0$

Критерий оценки

«5»	**«4»**	**«3»**	**«2»**
Решение верное с заданной точностью, график построен верно, все интервалы изоляции корней найдены верно	Решение верное с заданной точностью, график построен верно, найдены не все интервалы изоляции корней	Решение верное с заданной точностью, график построен неверно, найдены не все интервалы изоляции корней	Решение неверное

Тема 1.2. Линейные уравнения и системы уравнений

Практическое занятие № 3

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса. Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Проверяемые компетенции:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях;

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде;

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста;

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях;

ОК 08. Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности;

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках;

ПК 3.1 Осуществлять выбор готовых моделей искусственного интеллекта;

ПК 3.2 Формировать сценарии обучения готовых моделей искусственного интеллекта.

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Метод Гаусса — классический метод решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Рассмотрим систему линейных уравнений с действительными постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n &= y_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n &= y_2 \\ \ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n &= y_m \end{cases}$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & \\ a_{m1}a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = Y$$

Метод Гаусса решения системы линейных уравнений включает в себя 2 стадии:

- последовательное (прямое) исключение;
- обратная подстановка.

Последовательное исключение

Исключения Гаусса основаны на идее последовательного исключения переменных по одной до тех пор, пока не останется только одно уравнение с одной переменной в левой части.

Затем это уравнение решается относительно единственной переменной.

Таким образом, систему уравнений приводят к треугольной (ступенчатой) форме. Для этого среди элементов первого столбца матрицы выбирают ненулевой (а чаще максимальный) элемент и перемещают его на крайнее верхнее положение перестановкой строк.

Затем нормируют все уравнения, разделив его на коэффициент a_{i1}, где i – номер столбца.

$$\begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot x_2 + & \dots + & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \cdot x_n = & \frac{y_1}{a_{11}} \\ x_1 + \frac{a_{22}}{a_{21}} \cdot x_2 + & \dots + & \frac{a_{2n}}{a_{21}} \cdot x_n = & \frac{y_2}{a_{21}} \\ \dots & & & \\ x_1 + \frac{a_{m2}}{a_{m1}} \cdot x_2 + & \dots + & \frac{a_{mn}}{a_{m1}} \cdot x_n = & \frac{y_m}{a_{m1}} \end{cases}$$

Затем вычитают получившуюся после перестановки первую строку из остальных строк:

$$\begin{cases} x_1 + & \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot x_2 + & \dots + & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \cdot x_n = & \frac{y_1}{a_{11}} \\ 0 + & \left(\frac{a_{22}}{a_{21}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}\right) \cdot x_2 + & \dots + & \left(\frac{a_{2n}}{a_{21}} - \frac{a_{1n}}{a_{11}}\right) \cdot x_n = & \left(\frac{y_2}{a_{21}} - \frac{y_1}{a_{11}}\right) \\ \dots & & & & \\ 0 + & \left(\frac{a_{m2}}{a_{m1}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}\right) \cdot x_2 + & \dots + & \left(\frac{a_{mn}}{a_{m1}} - \frac{a_{1n}}{a_{11}}\right) \cdot x_n = & \left(\frac{y_m}{a_{m1}} - \frac{y_1}{a_{11}}\right) \end{cases}$$

Получают новую систему уравнений, в которой заменены соответствующие коэффициенты.

$$\begin{cases} x_1 & + a_{12}' \cdot x_2 + & \dots + & a_{1n}' \cdot x_n = & y_1' \\ 0 & + a_{22}' \cdot x_2 + & \dots + & a_{2n}' \cdot x_n = & y_2' \\ \dots & & & & \\ 0 & + a_{m2}' \cdot x_2 + & \dots + & a_{mn}' \cdot x_n = & y_m' \end{cases}$$

После того, как указанные преобразования были совершены, первую строку и первый столбец мысленно вычёркивают и продолжают указанный процесс для всех последующих уравнений пока не останется уравнение с одной неизвестной:

$$\begin{cases} x_1 & + & a_{12}' \cdot x_2 & + & a_{13}' \cdot x_3 & + & \dots & + & a_{1n}' \cdot x_n & = & y_1' \\ 0 & + & x_2 & + & a_{23}'' \cdot x_3 & + & \dots & + & a_{2n}'' \cdot x_n & = & y_2'' \\ 0 & + & 0 & + & x_3 & + & \dots & + & a_{3n}''' \cdot x_n & = & y_3''' \\ \dots & & & & & & & & & & \\ 0 & + & 0 & + & 0 & + & \dots & + & x_n & = & y_m^n{}' \end{cases}$$

Обратная подстановка

Обратная подстановка предполагает подстановку полученного на предыдущем шаге значения переменной x_n в предыдущие уравнения. Эта процедура повторяется для всех оставшихся решений:

$$x_{n-1} = y_{n-1}^{(n-1)\prime} - a_{(n-1)n}^{(n-1)\prime} \cdot x_n$$

$$x_{n-2} = y_{n-2}^{(n-2)\prime} - a_{(n-2)n}^{(n-2)\prime} \cdot x_n - a_{(n-2)(n-1)}^{(n-2)\prime} \cdot x_{n-1}$$

$$\dots$$

$$x_2 = y_2'' - a_{2n}'' \cdot x_n - a_{2(n-1)}'' \cdot x_{(n-1)} - \dots - a_{23}'' \cdot x_3$$

$$x_1 = y_1' - a_{1n}' \cdot x_n - a_{1(n-1)}' \cdot x_{(n-1)} - \dots - a_{13}' \cdot x_3 - a_{12}' \cdot x_2$$

Вариант 1

Решить систему:

$$\begin{cases} 3x + 4y - z = 8, \\ 2x - 2y + 4z = -4, \\ -x + 21y - z = -1. \end{cases}$$

Вариант 2

Решить систему:

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 2x - y + 3z = 9, \\ x + 4y - z = 2. \end{cases}$$

Вариант 3

Решить систему:

$$\begin{cases} 4x + 3y + 2z = 1, \\ 2x + 3y + 4z = 2, \\ 3x - y + z = 3. \end{cases}$$

Вариант 4

Решить систему:

$$\begin{cases} 5x + 2y + z = 5, \\ 3x + 3y + 2z = 1, \\ x + y + z = 2. \end{cases}$$

Вариант 5

Решить систему:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4, \\ x + 5y - 2z = 1, \\ 3x - y + 2z = 3. \end{cases}$$

Вариант 6

Решить систему:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7, \\ 4x - y + z = 4, \\ 3x + 4y - z = 3. \end{cases}$$

Вариант 7

Решить систему:

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = -1, \\ 3x - y + z = 4, \\ x + 2y + 3z = 5. \end{cases}$$

Вариант 8

Решить систему:

$$\begin{cases} x - y + z = 3, \\ 2x + y - 3z = -1, \\ 4x + 3y + z = 9. \end{cases}$$

Вариант 9

Решить систему:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 5, \\ 2x + y + 2z = 6, \\ 3x - y + z = 4. \end{cases}$$

Вариант 10

Решить систему:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 7, \\ x - 2y + z = 1, \\ 3x + 4y - 2z = 8. \end{cases}$$

Критерий оценки

«5»	«4»	«3»	«2»
Решение верно, отчет оформлен верно по всем пунктам	Решение верно, отчет оформлен верно не по всем пунктам	Решение верно, отчет не оформлен	Решение неверно

Практическое занятие№4

Проверяемые компетенции:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях;

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде;

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста;

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях;

ОК 08. Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности;

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках;

ПК 3.1 Осуществлять выбор готовых моделей искусственного интеллекта;

ПК 3.2 Формировать сценарии обучения готовых моделей искусственного интеллекта.

Итерация для линейных систем

Способ итераций дает возможность получить последовательность приближенных значений, сходящихся к точному решению системы, подобно тому как это делается для одного уравнения.

Для определенности ограничимся системой из четырех уравнений с четырьмя неизвестными (система четвертого порядка), которую запишем в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15} = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25} = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35} = 0 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45} = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(*)}$$

Разрешим первое уравнение системы относительно x_1:

$$x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \frac{a_{14}}{a_{11}}x_4 - \frac{a_{15}}{a_{11}}$$

Затем разрешим второе уравнение относительно x_2 и т.д. Тогда систему можно переписать в виде:

$$\begin{cases} x_1 = \ldots \quad \alpha_{12}x_2 \quad + \alpha_{13}x_3 \quad + \alpha_{14}x_4 \quad + \alpha_{15} \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 \quad \ldots \quad + \alpha_{23}x_3 \quad + \alpha_{24}x_4 \quad + \alpha_{25} \\ x_3 = \alpha_{31}x_1 \quad + \alpha_{32}x_2 \quad \ldots \quad + \alpha_{34}x_4 \quad + \alpha_{35} \\ x_4 = \alpha_{41}x_1 \quad + \alpha_{42}x_2 \quad + \alpha_{43}x_3 \quad \ldots \quad + \alpha_{15} \end{cases} \qquad \textbf{(**)}$$

где $\alpha_{ik} = -\dfrac{a_{ik}}{a_{ii}}$, $(i = 1,2,3,4;\ k = 1,2,3,4,5)$.

Система является частным случаем записи вида:

$$\begin{cases} x_1 = L_1(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ x_2 = L_2(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ x_3 = L_3(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ x_4 = L_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \end{cases} \qquad (***)$$

При этом, линейная функция L_1 фактически не зависит от x_1.

Зададим какие-либо начальные значения неизвестных (нулевые приближения):

$$x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ x_3^{(0)},\ x_4^{(0)}$$

Подставляя эти значения в правые части системы (***), получим первые приближения:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = L_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}) \\ x_2^{(1)} = L_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}) \\ x_3^{(1)} = L_3(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}) \\ x_4^{(1)} = L_4(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}) \end{cases}$$

Полученные первые приближения могут быть так же использованы для получения вторых, третьих и т.д. приближений. Т.е. можно записать:

$$\boxed{\begin{cases} x_1^{(k)} = L_1(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, x_3^{(k-1)}, x_4^{(k-1)}) \\ x_2^{(k)} = L_2(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, x_3^{(k-1)}, x_4^{(k-1)}) \\ x_3^{(k)} = L_3(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, x_3^{(k-1)}, x_4^{(k-1)}) \\ x_4^{(k)} = L_4(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, x_3^{(k-1)}, x_4^{(k-1)}) \end{cases}}$$

Условия сходимости итерационного процесса:

Установим условия, выполнение которых обеспечит сходимость получающихся приближений к истинному (точному) решению системы $x_1,\ \ x_2,\ \ x_3,\ \ x_4$.

Не вдаваясь в подробности, скажем, что для того чтобы итерационный процесс сходился к точному решению, достаточно, чтобы *все коэффициенты системы были малы по сравнению с диагональными*.

Это условие можно сформулировать и более точно:

Для сходимости процесса итераций достаточно, чтобы в каждом столбце сумма отношений коэффициентов системы к диагональным элементам, взятым из той же строки, была строго меньше единицы:

$$\sum_{k=1}^{5}\alpha_{ik}=\sum_{k=1}^{5}\left(-\frac{a_{ik}}{a_{ii}}\right)\quad<1,$$
$$(i=1,2,3,4)$$

Итерация Якоби

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}4x_1-x_2+x_3=7\\4x_1-8x_2+x_3=-21\\-2x_1+x_2+5x_3=15\end{cases}\qquad(1)$$

Уравнения можно записать в виде:

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{7+x_2-x_3}{4}\\x_2=\dfrac{21+4x_1+x_3}{8}\\x_3=\dfrac{15+2x_1-x_2}{5}\end{cases}\qquad(2)$$

Это позволяет предложить следующий итерационный процесс:

$$\boxed{\begin{cases}x_1^{(k)}=\dfrac{7+x_2^{(k-1)}-x_3^{(k-1)}}{4}\\x_2^{(k)}=\dfrac{21+4x_1^{(k-1)}+x_3^{(k-1)}}{8}\\x_3^{(k)}=\dfrac{15+2x_1^{(k-1)}-x_2^{(k-1)}}{5}\end{cases}}\qquad(3)$$

или (другой вид записи)

$$\boxed{\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\dfrac{7+x_2^{(k)}-x_3^{(k)}}{4}\\x_2^{(k+1)}=\dfrac{21+4x_1^{(k)}+x_3^{(k)}}{8}\\x_3^{(k+1)}=\dfrac{15+2x_1^{(k)}-x_2^{(k)}}{5}\end{cases}}\qquad(3^*)$$

Покажем, что если начать с точки $P_0=\left(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ x_3^{(0)},\ x_4^{(0)}\right)=(1,\ \ 2,\ \ 2)$, то итерация (3) сходится к решению $(2,\ \ 4,\ \ 3)$. Подставим $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=2$ в

правую часть каждого уравнения из (3), чтобы получить новые значения:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{7 + x_2^{(0)} - x_3^{(0)}}{4} = \dfrac{7+2-2}{4} = 1.75 \\ x_2^{(1)} = \dfrac{21 + 4x_1^{(0)} + x_3^{(0)}}{8} = \dfrac{21+4\cdot 1+2}{8} = 3.375 \\ x_3^{(1)} = \dfrac{15 + 2x_1^{(0)} - x_2^{(0)}}{5} = \dfrac{15+2\cdot 1-2}{5} = 3 \end{cases}$$

Новая точка $P_1 = \left(x_1^{(1)},\, x_2^{(1)},\, x_3^{(1)},\, x_4^{(1)}\right) = (1.75,\ \ 3.375,\ \ 3)$ ближе, чем P_0.

Итерация, использующая (3) генерирует последовательность точек $\{P_k\}$, которая сходится к решению $(2,\ \ 4,\ \ 3)$:

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
0	*1.0*	*2.0*	*2.0*
1	*1.75*	*3.375*	*3.0*
2	*1.84375*	*3.875*	*3.025*
3	*1.9625*	*3.925*	*2.9625*
4	*1.990625*	*3.9765625*	*3.0*
5	*1.99414063*	*3.9953125*	*3.0009375*
…	…	…	…
15	*1.99999993*	*3.99999985*	*3.0009375*
…	…	…	…
19	*2.0*	*4.0*	*3.0*

Этот процесс называется ***итерацией Якоби*** и может использоваться для решения определенных типов линейныхсистем.

Итерация Гаусса-Зейделя

Процесс итерации Якоби иногда можно модифицировать для ускорения сходимости.

Отметим, что итеративный процесс Якоби производит три последовательности — $\{x_1^{(k)}\}$, $\{x_2^{(k)}\}$, $\{x_3^{(k)}\}$, $\{x_4^{(k)}\}$. Кажется разумным, что $x_1^{(k+1)}$ может быть использовано вместо $x_2^{(k)}$. Аналогично $x_1^{(k+1)}$ и $x_2^{(k+1)}$ можно использовать в вычислении $x_3^{(k+1)}$. Например, для уравнений из системы (1) это даст следующий вид итерационного процесса Гаусса-Зейделя, использующий (3*):

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{7 + x_2^{(k)} - x_3^{(k)}}{4} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{21 + 4x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}}{8} \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{15 + 2x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}}{5} \end{cases}$$

Такой итерационный процесс даст результаты:

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
0	*1.0*	*2.0*	*2.0*
1	*1.75*	*3.75*	*2.95*
2	*1.95*	*3.96875*	*2.98625*
3	*1.995625*	*3.99609375*	*2.99903125*
…	…	…	…
8	*1.99999983*	*3.99999988*	*2.99999996*
9	*1.99999998*	*399999999*	*3.0*
10	*2.0*	*4.0*	*3.0*

Т.е. к точному решению мы пришли уже на 10-ом шаге итерации, а не на 19, как в итерации Якоби.

Вариант	**Система уравнений**
1	4,003 · x1 + 0,207 · x2 + 0,519 · x3 + 0,281 · x4 = 0,425 0,416 · x1 + 3,273 · x2 + 0,326 · x3 + 0,375 · x4 = 0,021 0,297 · x1 + 0,351 · x2 + 2,997 · x3 + 0,429 · x4 = 0,213 0,412 · x1 + 0,194 · x2 + 0,215 · x3 + 3,628 · x4 = 0,946.
2	2,591 · x1 + 0,512 · x2 + 0,128 · x3 + 0,195 · x4 = 0,159 0,203 · x1 + 3,469 · x2 + 0,572 · x3 + 0,162 · x4 = 0,280 0,256 · x1 + 0,273 · x2 + 2,994 · x3 + 0,501 · x4 = 0,134 0,381 · x1 + 0,219 · x2 + 0,176 · x3 + 5,903 · x4 = 0,864.
3	2,979 · x1 + 0,427 · x2 + 0,406 · x3 + 0,348 · x4 = 0,341 0,273 · x1 + 3,951 · x2 + 0,217 · x3 + 0,327 · x4 = 0,844 0,318 · x1 + 0,197 · x2 + 2,875 · x3 + 0,166 · x4 = 0,131 0,219 · x1 + 0,231 · x2 + 0,187 · x3 + 3,276 · x4 = 0,381.
4	3,738 · x1 + 0,195 · x2 + 0,275 · x3 + 0,136 · x4 = 0,815 0,519 · x1 + 5,002 · x2 + 0,405 · x3 + 0,283 · x4 = 0,191 0,306 · x1 + 0,381 · x2 + 4,812 · x3 + 0,418 · x4 = 0,423 0,272 · x1 + 0,142 · x2 + 0,314 · x3 + 3,935 · x4 = 0,352.
5	4,855 · x1 +1,239 · x2 + 0,272 · x3 + 0,258 · x4 =1,192 1,491 · x1 + 4,954 · x2 + 0,124 · x3 + 0,236 · x4 = 0,256

	0,456 · x1 + 0,285 · x2 + 4,354 · x3 + 0,254 · x4 = 0,852 0,412 · x1 + 0,335 · x2 + 0,158 · x3 + 2,874 · x4 = 0,862.
6	5,401 · x1 + 0,519 · x2 + 0,364 · x3 + 0,283 · x4 = 0,243 0,295 · x1 + 4,830 · x2 + 0,421 · x3 + 0,278 · x4 = 0,231 0,524 · x1 + 0,397 · x2 + 4,723 · x3 + 0,389 · x4 = 0,721 0,503 · x1 + 0,264 · x2 + 0,248 · x3 + 4,286 · x4 = 0,220.
7	3,857 · x1 + 0,239 · x2 + 0,272 · x3 + 0,258 · x4 = 0,190 0,491 · x1 + 3,941 · x2 + 0,131 · x3 + 0,178 · x4 = 0,179 0,436 · x1 + 0,281 · x2 + 4,189 · x3 + 0,416 · x4 = 0,753 0,317 · x1 + 0,229 · x2 + 0,326 · x3 + 2,971 · x4 = 0,860.
8	4,238 · x1 + 0,329 · x2 + 0,256 · x3 + 0,425 · x4 = 0,560 0,249 · x1 + 2,964 · x2 + 0,351 · x3 + 0,127 · x4 = 0,380 0,365 · x1 + 0,217 · x2 + 2,897 · x3 + 0,168 · x4 = 0,778 0,178 · x1 + 0,294 · x2 + 0,432 · x3 + 3,701 · x4 = 0,749.
9	2,958 · x1 + 0,147 · x2 + 0,354 · x3 + 0,238 · x4 = 0,651 0,127 · x1 + 2,395 · x2 + 0,256 · x3 + 0,273 · x4 = 0,898 0,403 · x1 + 0,184 · x2 + 3,815 · x3 + 0,416 · x4 = 0,595 0,259 · x1 + 0,361 · x2 + 0,281 · x3 + 3,736 · x4 = 0,389.
10	4,503 · x1 + 0,219 · x2 + 0,527 · x3 + 0,396 · x4 = 0,553 0,259 · x1 + 5,121 · x2 + 0,423 · x3 + 0,206 · x4 = 0,358 0,413 · x1 + 0,531 · x2 + 4,317 · x3 + 0,264 · x4 = 0,565 0,327 · x1 + 0,412 · x2 + 0,203 · x3 + 4,851 · x4 = 0,436.
11	5,103 · x1 + 0,293 · x2 + 0,336 · x3 + 0,270 · x4 = 0,745 0,179 · x1 + 4,912 · x2 + 0,394 · x3 + 0,375 · x4 = 0,381 0,189 · x1 + 0,321 · x2 + 2,875 · x3 + 0,216 · x4 = 0,480 0,317 · x1 + 0,165 · x2 + 0,386 · x3 + 3,934 · x4 = 0,552.
12	5,554 · x1 + 0,252 · x2 + 0,496 · x3 + 0,237 · x4 = 0,442 0,580 · x1 + 4,953 · x2 + 0,467 · x3 + 0,028 · x4 = 0,464 0,319 · x1 + 0,372 · x2 + 8,935 · x3 + 0,520 · x4 = 0,979 0,043 · x1 + 0,459 · x2 + 0,319 · x3 + 4,778 · x4 = 0,126.
13	2,998 · x1 + 0,209 · x2 + 0,315 · x3 + 0,281 · x4 = 0,108 0,163 · x1 + 3,237 · x2 + 0,226 · x3 + 0,307 · x4 = 0,426 0,416 · x1 + 0,175 · x2 + 3,239 · x3 + 0,159 · x4 = 0,310 0,287 · x1 + 0,196 · x2 + 0,325 · x3 + 4,062 · x4 = 0,084.
14	5,452 · x1 + 0,401 · x2 + 0,758 · x3 + 0,123 · x4 = 0,886 0,785 · x1 + 2,654 · x2 + 0,687 · x3 + 0,203 · x4 = 0,356 0,402 · x1 + 0,244 · x2 + 4,456 · x3 + 0,552 · x4 = 0,342

	0,210 · x1 + 0,514 · x2 + 0,206 · x3 + 4,568 · x4 = 0,452.
15	2,923 · x1 + 0,220 · x2 + 0,159 · x3 + 0,328 · x4 = 0,605 0,363 · x1 + 4,123 · x2 + 0,268 · x3 + 0,327 · x4 = 0,496 0,169 · x1 + 0,271 · x2 + 3,906 · x3 + 0,295 · x4 = 0,590 0,241 · x1 + 0,319 · x2 + 0,257 · x3 + 3,862 · x4 = 0,896.
16	5,482 · x1 + 0,358 · x2 + 0,237 · x3 + 0,409 · x4 = 0,416 0,580 · x1 + 4,953 · x2 + 0,467 · x3 + 0,028 · x4 = 0,464 0,319 · x1 + 0,372 · x2 + 8,935 · x3 + 0,520 · x4 = 0,979 0,043 · x1 + 0,459 · x2 + 0,319 · x3 + 4,778 · x4 = 0,126.
17	3,738 · x1 + 0,195 · x2 + 0,275 · x3 + 0,136 · x4 = 0,815 0,519 · x1 + 5,002 · x2 + 0,405 · x3 + 0,283 · x4 = 0,191 0,306 · x1 + 0,381 · x2 + 4,812 · x3 + 0,418 · x4 = 0,423 0,272 · x1 + 0,142 · x2 + 0,314 · x3 + 3,935 · x4 = 0,352.
18	3,910 · x1 + 0,129 · x2 + 0,283 · x3 + 0,107 · x4 = 0,395 0,217 · x1 + 4,691 · x2 + 0,279 · x3 + 0,237 · x4 = 0,432 0,201 · x1 + 0,372 · x2 + 2,987 · x3 + 0,421 · x4 = 0,127 0,531 · x1 + 0,196 · x2 + 0,236 · x3 + 5,032 · x4 = 0,458.
19	5,482 · x1 + 0,617 · x2 + 0,520 · x3 + 0,401 · x4 = 0,823 0,607 · x1 + 4,195 · x2 + 0,232 · x3 + 0,570 · x4 = 0,152 0,367 · x1 + 0,576 · x2 + 8,193 · x3 + 0,582 · x4 = 0,625 0,389 · x1 + 0,356 · x2 + 0,207 · x3 + 5,772 · x4 = 0,315.
20	3,345 · x1 + 0,329 · x2 + 0,365 · x3 + 0,203 · x4 = 0,305 0,125 · x1 + 4,210 · x2 + 0,402 · x3 + 0,520 · x4 = 0,283 0,314 · x1 + 0,251 · x2 + 4,531 · x3 + 0,168 · x4 = 0,680 0,197 · x1 + 0,512 · x2 + 0,302 · x3 + 2,951 · x4 = 0,293.
21	4,247 · x1 + 0,275 · x2 + 0,397 · x3 + 0,239 · x4 = 0,721 0,466 · x1 + 4,235 · x2 + 0,264 · x3 + 0,358 · x4 = 0,339 0,204 · x1 + 0,501 · x2 + 3,721 · x3 + 0,297 · x4 = 0,050 0,326 · x1 + 0,421 · x2 + 0,254 · x3 + 3,286 · x4 = 0,486.
22	3,476 · x1 + 0,259 · x2 + 0,376 · x3 + 0,398 · x4 = 0,871 0,425 · x1 + 4,583 · x2 + 0,417 · x3 + 0,328 · x4 = 0,739 0,252 · x1 + 0,439 · x2 + 3,972 · x3 + 0,238 · x4 = 0,644 0,265 · x1 + 0,291 · x2 + 0,424 · x3 + 3,864 · x4 = 0,581.
23	3,241 · x1 + 0,197 · x2 + 0,643 · x3 + 0,236 · x4 = 0,454 0,257 · x1 + 3,853 · x2 + 0,342 · x3 + 0,427 · x4 = 0,371 0,324 · x1 + 0,317 · x2 + 2,793 · x3 + 0,238 · x4 = 0,465 0,438 · x1 + 0,326 · x2 + 0,483 · x3 + 4,229 · x4 = 0,822.

24	4,405 · x1 + 0,472 · x2 + 0,395 · x3 + 0,253 · x4 = 0,623 0,227 · x1 + 2,957 · x2 + 0,342 · x3 + 0,327 · x4 = 0,072 0,419 · x1 + 0,341 · x2 + 3,238 · x3 + 0,394 · x4 = 0,143 0,325 · x1 + 0,326 · x2 + 0,401 · x3 + 4,273 · x4 = 0,065.
25	2,974 · x1 + 0,347 · x2 + 0,439 · x3 + 0,123 · x4 = 0,381 0,242 · x1 + 2,895 · x2 + 0,412 · x3 + 0,276 · x4 = 0,721 0,249 · x1 + 0,378 · x2 + 3,791· x3 + 0,358 · x4 = 0,514 0,387 · x1 + 0,266 · x2 + 0,431· x3 + 4,022 · x4 = 0,795.
26	3,452 · x1 + 0,458 · x2 + 0,125 · x3 + 0,236 · x4 = 0,745 0,254 · x1 + 2,458 · x2 + 0,325 · x3 + 0,126 · x4 = 0,789 0,305 · x1 + 0,125 · x2 + 3,869 · x3 + 0,458 · x4 = 0,654 0,423 · x1 + 0,452 · x2 + 0,248 · x3 + 3,896 · x4 = 0,405.
27	2,979 · x1 + 0,427 · x2 + 0,406 · x3 + 0,348 · x4 = 0,341 0,273 · x1 + 3,951 · x2 + 0,217 · x3 + 0,327 · x4 = 0,844 0,318 · x1 + 0,197 · x2 + 2,875 · x3 + 0,166 · x4 = 0,131 0,219 · x1 + 0,231 · x2 + 0,187 · x3 + 3,276 · x4 = 0,381.
28	2,048 · x1 + 0,172 · x2 + 0,702 · x3 + 0,226 · x4 = 0,514 0,495 · x1 + 4,093 · x2 + 0,083 · x3 + 0,390 · x4 = 0,176 0,277 · x1 + 0,368 · x2 + 4,164 · x3 + 0,535 · x4 = 0,309 0,766 · x1 + 0,646 · x2 + 0,767 · x3 + 5,960 · x4 = 0,535.
29	2,389 · x1 + 0,273 · x2 + 0,126 · x3 + 0,418 · x4 = 0,144 0,329 · x1 + 2,796 · x2 + 0,179 · x3 + 0,278 · x4 = 0,297 0,186 · x1 + 0,275 · x2 + 2,987 · x3 + 0,316 · x4 = 0,529 0,197 · x1 + 0,219 · x2 + 0,274 · x3 + 3,127 · x4 = 0,869.

Критерий оценки

«5»	«4»	«3»	«2»
Решение верно, отчет оформлен верно по всем пунктам	Решение верно, отчет оформлен верно не по всем пунктам	Решение верно, отчет не оформлен	Решение неверно

Тема 1.3. Нелинейные уравнения

Практическое занятие №5

Реализация метода Ньютона для решения нелинейных уравнений

Проверяемые компетенции:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях;

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде;

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста;

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях;

ОК 08. Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности;

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках;

ПК 3.1 Осуществлять выбор готовых моделей искусственного интеллекта;

ПК 3.2 Формировать сценарии обучения готовых моделей искусственного интеллекта.

Метод касательных (метод Ньютона)

Метод касательных — это итерационный метод, который использует касательные к графику функции для нахождения корня.

Алгоритм:

1. Выберите начальное приближение $x0$.
2. Вычислите следующее приближение по формуле:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

3. Повторяйте итерации, пока $| x_{n+1} - x_n | < \varepsilon$.

Вариант 1

Найти корень уравнения $x^2 - 2 = 0$ на интервале $[1,2]$ с точностью $\varepsilon = 0.0001$.

Вариант 2

Решить уравнение $\cos x - x = 0$ на интервале $[0,1]$ с точностью $\varepsilon = 0.001$.

Вариант 3

Найти корень уравнения $e^x - 3x = 0$ на интервале $[0,1]$ с точностью $\varepsilon = 0.0001$.

Вариант 4

Решить уравнение $\ln x + x2 = 0$ на интервале $[0.5,1]$ с точностью $\varepsilon = 0.001$.

Вариант 5

Найти корень уравнения $x^3 - 3x + 1 = 0$ на интервале $[1,2]$ с точностью $\varepsilon = 0.0001$.

Вариант 6

Решить уравнение $\sin x - 0.5 = 0$ на интервале $[0, \pi]$ с точностью $\varepsilon = 0.001$.

Вариант 7

Найти корень уравнения $x^3 - x^2 - 1 = 0$ на интервале $[1,2]$ с точностью $\varepsilon = 0.0001$.

Вариант 8

Решить уравнение $x - e^{-x} = 0$ на интервале $[0,1]$ с точностью $\varepsilon = 0.001$.

Вариант 9

Найти корень уравнения $\operatorname{tg} x - x = 0$ на интервале $[0, \frac{\pi}{2}]$ с точностью$\varepsilon = 0.0001$.

Вариант 10

Решить уравнение $x^5 - x - 1 = 0$ на интервале $[1,2]$ с точностью $\varepsilon = 0.001$.

Критерий оценки

«5»	«4»	«3»	«2»
Решение верно, отчет оформлен верно по всем пунктам	Решение верно, отчет оформлен верно не по всем пунктам	Решение верно, отчет не оформлен	Решение неверно

Практическое занятие №6

Применение численных методов для задач оптимизации в нелинейных системах

Проверяемые компетенции:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях;

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде;

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста;

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях;

ОК 08. Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности;

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках;

ПК 3.1 Осуществлять выбор готовых моделей искусственного интеллекта;

ПК 3.2 Формировать сценарии обучения готовых моделей искусственного интеллекта.

Использование конечно-разностных производных для решения систем нелинейных алгебраических или трансцендентных уравнений ($F(x) = 0$, где $F: R^n \to R^n$) чаще всего связано с **численным приближением матрицы Якоби** в рамках классического метода Ньютона или его модификаций.

Основная идея метода (метод Ньютона с численным Якобианом)

Итерационный процесс метода Ньютона выглядит так:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [J(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)})$$

Где элементы матрицы Якоби $J_{ij}(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ заменяются на конечно-разностные аппроксимации.

Варианты аппроксимации производных

1. **Односторонние разности (первый порядок точности $O(h)$):**

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \approx \frac{f_i(x + h_j e_j) - f_i(x)}{h_j}$$

   - *Плюс:* Требует мало вычислений функции (одно дополнительное вычисление на каждую переменную x_j, то есть n вычислений функции для построения всего Якобиана).
   - *Минус:* Низкая точность, сильная зависимость от выбора шага h_j.

2. **Центральные разности (второй порядок точности $O(h^2)$):**

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \approx \frac{f_i(x + h_j e_j) - f_i(x - h_j e_j)}{2h_j}$$

   - *Плюс:* Гораздо более высокая точность.
   - *Минус:* Требует $2n$ вычислений функции $F(x)$ на каждой итерации, что увеличивает время работы вдвое по сравнению с односторонними разностями.

Примечание: e_j — это единичный вектор в направлении переменной x_j, а h_j — малый шаг дифференцирования.

Выбор шага h_j

Выбор шага h критически важен:

- Если h **слишком велик**, растет погрешность аппроксимации производной (погрешность усечения).
- Если h **слишком мал**, проявляются ошибки округления с плавающей запятой (вычитание почти равных чисел).

На практике часто используют адаптивный выбор шага, например:

$$h_j = \sqrt{\varepsilon} \cdot \max(|x_j|, 1)$$

где $\varepsilon \approx 10^{-16}$ — машинный эпсилон (для чисел двойной точности `double precision`).

Модификации и альтернативные подходы

- **Метод секущих для систем (квазиньютоновские методы, например, метод Бройдена):**
  Вместо пересчета Якобиана с помощью конечных разностей на каждом шаге (что для больших n требует n или $2n$ вычислений функции) матрица Якоби или её обратная обновляется итеративно по результатам предыдущего шага с помощью поправок ранга 1.
- **Метод конечных разностей для систем дифференциальных уравнений в частных производных (PDE):**
  Когда нелинейная система получена из дискретизации PDE (эллиптических или параболических), сама сетка строится по пространству, а нелинейность в узлах решается итерационно (например, методом простой итерации или вложенным циклом Ньютона). Википедия +1
- **Автоматическое дифференцирование (AD):**
  Современная альтернатива конечным разностям. В отличие от конечных разностей, которые дают погрешность округления/усечения, автоматическое дифференцирование дает точное значение производной с машинной точностью и сопоставимой скоростью.

***Пример* 1.** Методом Ньютона приближенно найти положительное решение системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \\ f_2(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - 4z, \\ f_3(x,y,z) = 3x^2 - 4y + z^2. \end{cases}$$

исходя из начального приближения $x_0 = y_0 = z_0 = 0{,}5$.

Полагая:

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{bmatrix},$$

имеем:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ 2x^2 + y^2 - 4z \\ 3x^2 - 4y + z^2 \end{bmatrix}$$

Отсюда

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}25 - 1 \\ 0{,}50 + 0{,}25 - 2{,}00 \\ 0{,}75 - 2{,}00 + 0{,}25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}25 \\ -1{,}25 \\ -1{,}00 \end{bmatrix}.$$

Составим матрицу Якоби

$$W(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 4x & 2y & -4 \\ 6x & -4 & 2z \end{bmatrix}$$

Имеем

$$W(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \text{ причем } \Delta = \det W(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} = -40.$$

Следовательно, матрица $W(\boldsymbol{x}^{(0)})$ - неособенная. Составим обратную ей матрицу

$$W^{-1}(\boldsymbol{x}^{(0)}) = -\frac{1}{40}\begin{bmatrix} -15 & -5 & -5 \\ -14 & -2 & 6 \\ -11 & 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{3}{20} \\ \frac{11}{40} & -\frac{7}{40} & \frac{1}{40} \end{bmatrix}.$$

По формуле (27) получаем первое приближение

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{x}^{(0)} - W^{-1}(\boldsymbol{x}^{(0)})\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{3}{20} \\ \frac{11}{40} & -\frac{7}{40} & \frac{1}{40} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}25 \\ -1{,}25 \\ -1{,}00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}375 \\ 0 \\ -0{,}125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}875 \\ 0{,}500 \\ 0{,}375 \end{bmatrix}.$$

Аналогично находятся дальнейшие приближения. Результаты вычислений приведены в Таблице 1.

Таблица 1

Последовательные приближения корней

i	*x*	*y*	*z*
0	0,5	0,5	0,5
1	0,875	0,5	0,375
2	0,78981	0,49662	0,36993
3	0,78521	0,49662	0,36992

Останавливаясь на приближении $\boldsymbol{x}^{(3)}$, будем иметь:

$x = 0,7852$; $y = 0,4966$; $z = 0,3699$.

Критерий оценки

«5»	«4»	«3»	«2»
Решение верно, отчет оформлен верно по всем пунктам	Решение верно, отчет оформлен верно не по всем пунктам	Решение верно, отчет не оформлен	Решение неверно

Раздел 2. Интерполяция и аппроксимация данных

Тема 2.1. Полиномиальная интерполяция

Практическое занятие №7

Интерполяция методом Лагранжа для восстановления недостающих данных. Построение полиномиальной интерполяции для реальных данных

Проверяемые компетенции:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях;

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде;

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста;

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в

чрезвычайных ситуациях;

ОК 08. Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности;

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках;

ПК 3.1 Осуществлять выбор готовых моделей искусственного интеллекта;

ПК 3.2 Формировать сценарии обучения готовых моделей искусственного интеллекта.

Интерполяционный многочлен Лагранжа

Пусть в точках $x_0, x_1,..., x_n$ таких, что $a \le x_0 <...< x_n \le b$ известны значения функции $y = f(x)$, то есть на отрезке $[a; b]$ задана табличная (сеточная) функция:

x	x_0	x_1	…	x_n
y	y_0	y_1	…	y_n

Определение. Функция $\varphi(x)$ называется интерполирующей (интерполяционной) для $f(x)$ на $[a; b]$, если ее значения $\varphi(x_0)$, $\varphi(x_1)$, ..., $\varphi(x_n)$ в заданных точках $x_0, x_1,..., x_n$, называемых узлами интерполяции, совпадают с заданными значениями функции $f(x)$, то есть с $y_0, y_1,..., y_n$ соответственно.

Будем строить многочлен n-степени $L_n(x)$ в виде линейной комбинации

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x) f(x_i), \qquad (5.1)$$

где базисные многочлены имеют вид

$$p_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})(x_i-x_n)},$$

обладающий свойством: $L_n(x_i) = f(x_i), i = \overline{0,n}$, (5.2)

если известны значения функции $f(x)$ в точках $x_i, i = \overline{0,n}$.

Теорема. Полином n-й степени, обладающий свойством (5.2), единственный.

Пример

Функция $y = f(x)$ задана таблично в узлах

x	0,351	0,867	3,315	5,013	6,432
y	–0,572	–2,015	–3,342	–5,752	–6,911

1. Построим интерполяционный многочлен Лагранжа 4-й степени $L_4(x)$ в виде линейной комбинации $L_4(x) = \sum_{i=0}^{4} p_i(x) f(x_i)$.

Вычислим базисные многочлены.

$$p_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} =$$

$$= \frac{(x-0{,}867)(x-3{,}315)(x-5{,}013)(x-6{,}432)}{(0{,}351-0{,}867)(0.351-3{,}315)(0{,}351-5{,}013)(0{,}351-6{,}432)} =$$

$$= 0{,}0231 \cdot (x-0{,}867)(x-3{,}315)(x-5{,}013)(x-6{,}432),$$

$$p_1(x) = -0{,}0343 \cdot (x-0{,}351)(x-3{,}315)(x-5{,}013)(x-6{,}432),$$

$$p_2(x) = 0{,}0260 \cdot (x-0{,}351)(x-0{,}867)(x-5{,}013)(x-6{,}432),$$

$$p_3(x) = -0{,}0215 \cdot (x-0{,}351)(x-0{,}867)(x-3{,}315)(x-6{,}432),$$

$$p_4(x) = 0{,}0067 \cdot (x-0{,}351)(x-0{,}867)(x-3{,}315)(x-5{,}013).$$

Тогда интерполяционный многочлен Лагранжа 4-й степени будет иметь вид

$$L_4(x) = -0{,}0132 \cdot (x-0{,}867)(x-3{,}315)(x-5{,}013)(x-6{,}432) +$$
$$+ 0{,}0691 \cdot (x-0{,}351)(x-3{,}315)(x-5{,}013)(x-6{,}432) -$$
$$- 0{,}0870 \cdot (x-0{,}351)(x-0{,}867)(x-5{,}013)(x-6{,}432) +$$
$$+ 0{,}1235 \cdot (x-0{,}351)(x-0{,}867)(x-3{,}315)(x-6{,}432) -$$
$$- 0{,}0462 \cdot (x-0{,}351)(x-0{,}867)(x-3{,}315)(x-5{,}013).$$

Варианты индивидуальных заданий

1.

x	-1	0	1	2	4
y	-3	-1	1	3	7

2.

x	-2	2	3	4	5
y	-3	5	7	9	11

3.

x	1	2	3	5
y	4	5	6	8

4.

x	-2	-1	2	3	4
y	5	4	1	0	-1

5.

x	0	2	4	6
y	-2	4	10	16

6.

x	-1	0	1	2
y	-6	-1	4	9

7.

x	-1	0	1	2
y	-6	-1	4	9

8.

x	-2	1	2	3
y	-13	5	11	17

9.

x	-1	0	1	2	3
y	-4	-1	2	5	8

10.

x	-1	0	1	2	4
y	3	1	-1	-3	-7

11.

x	-1	2	3	4
y	1	7	9	11

12.

x	1	2	3	5
y	-4	-5	-6	-8

13.

x	-1	1	2	4
y	-4	0	2	6

14.

x	0	2	4	6
y	2	-4	-10	-16

15.

x	-1	0	1	3	4
y	1	3	5	9	11

16.

x	-2	2	3	4	5
y	3	-5	-7	-9	-11

17.

x	-1	1	2	3
y	5	-1	-4	-7

18.

x	-2	-1	2	3	4
y	-5	-4	-1	0	1

19.

x	-2	-1	1	3	4
y	-4	-1	5	11	14

20.

x	-1	0	1	2
y	6	1	-4	-9

21.

x	-2	-1	1	2	3
y	5	-2	4	7	10

22.

x	0	1	2	3
y	-2	-6	-10	-14

23.

x	-2	-1	2	3
y	-7	-2	13	18

24.

x	-1	0	1	2	3
y	4	1	-2	-5	-8

25.

x	-1	1	2	3
y	5	3	7	11

26.

x	-1	2	3	4
y	-1	-7	-9	-11

27.

x	-1	0	2	3
y	1	4	10	13

28.

x	-1	1	2	4
y	4	0	-2	-6

29.

x	-1	1	2	3
y	-7	-3	-1	1

30.

x	-1	0	1	2
y	-4	-3	0	4

31.

x	-2	1	2	3
y	2	8	10	12

32.

x	-1	0	1	3
y	-1	-1	1	11

33.

x	-2	-1	0	1
y	4	-1	-2	0

34.

x	0	1	2	3
y	-3	-2	1	5

35.

x	-2	-1	0	2
y	-1	-1	1	10

36.

x	1	2	3	4
y	-2	0	-2	-7

37.

x	-2	0	1	2
y	15	1	0	2

38.

x	-2	-1	0	1
y	5	2	1	1

39.

x	-3	-2	-1	0
y	-5	-6	-5	-3

40.

x	-2	-1	1	2
y	7	3	-1	3

Критерий оценки

«5»	«4»	«3»	«2»
Решение верно, отчет оформлен верно по всем пунктам	Решение верно, отчет оформлен верно не по всем пунктам	Решение верно, отчет не оформлен	Решение неверно

Тема 2.2. Аппроксимация функций

Практическое занятие №8

Применение метода наименьших квадратов для аппроксимации данных

Проверяемые компетенции:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях;

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде;

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста;

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях;

ОК 08. Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности;

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках;

ПК 3.1 Осуществлять выбор готовых моделей искусственного интеллекта;

ПК 3.2 Формировать сценарии обучения готовых моделей искусственного интеллекта.

Метод наименьших квадратов (МНК) — это математический метод, который используется для нахождения наилучшей приближенной зависимости (аппроксимации) по набору экспериментальных данных.

Суть метода

- **Минимизация отклонений**: МНК ищет такие параметры выбранной аналитической функции, при которых сумма квадратов разностей между измеренными (реальными) точками и значениями модели минимальна.
- **Линейная регрессия**: Самый простой и частый вариант — построение прямой линии вида $y = a + bx$.
- **Нелинейные зависимости**: Модели полиномиального, степенного или экспоненциального вида часто приводятся к линейному виду заменой переменных.

Основные виды аппроксимации

- Линейная аппроксимация — функция $y = a + bx$, где параметры находятся через средние значения без преобразований.
- Полиномиальная аппроксимация — функция $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m$, позволяющая описывать более сложные кривые.
- Степенная и экспоненциальная — функции вида $y = ax^b$ или $y = ae^{bx}$, которые линеаризуются через логарифмирование.

Пример 1

Допустим, у нас есть 4 экспериментальные точки (x_i, y_i):

- $(1, 2)$
- $(2, 3)$
- $(3, 5)$
- $(4, 4)$

1. Составим необходимые суммы:

- $n = 4$
- $\sum x_i = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$
- $\sum y_i = 2 + 3 + 5 + 4 = 14$
- $\sum x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$
- $\sum x_i y_i = (1 \cdot 2) + (2 \cdot 3) + (3 \cdot 5) + (4 \cdot 4) = 2 + 6 + 15 + 16 = 39$

2. Подставим значения в систему уравнений:

$$\begin{cases} 30a + 10b = 39 \\ 10a + 4b = 14 \end{cases}$$

3. Решим систему:

- Из второго уравнения выразим b:
  $4b = 14 - 10a \Longrightarrow b = 3.5 - 2.5a$
- Подставим в первое уравнение:
  $30a + 10(3.5 - 2.5a) = 39$
  $30a + 35 - 25a = 39$
  $5a = 4 \Longrightarrow \mathbf{a = 0.8}$
- Найдем b:
  $b = 3.5 - 2.5 \cdot 0.8 = 3.5 - 2.0 = \mathbf{1.5}$

4. Итоговое уравнение прямой:

$$y = 0.8x + 1.5$$

Полученная прямая наилучшим образом описывает исходные точки с точки зрения наименьших квадратов ошибок. Подобные расчеты удобно выполнять с помощью встроенных инструментов, например, функции `ЛИНЕЙН` в Microsoft Excel или библиотек в GitHub Python SciPy.

Метод наименьших квадратов: решение задач

Задание.

Методом наименьших квадратов для данных, представленных в таблице, найти линейную зависимость $y = ax + b$

Данные

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y_i	-11,47	-7,59	-4,32	-0,41	3,01	6,91	10,12	14,08

Решение.

Параметры a и b по методу наименьших квадратов можно найти из системы уравнений:

$$\begin{cases} a\sum x_i^2 + b\sum x_i = \sum x_i y_i \\ a\sum x_i + bn = \sum y_i \end{cases}$$

где суммирование ведется по i от 1 до n, n = 8. Составим расчетную таблицу:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	**Сумма**
x_i	-2	-1	0	1	2	3	4	5	**12**
y_i	-11,47	-7,59	-4,32	-0,41	3,01	6,91	10,12	14,08	**10,33**
x_i^2	4	1	0	1	4	9	16	25	**60**
$x_i y_i$	22,94	7,59	0	-0,41	6,02	20,73	40,48	70,4	**167,75**

Получаем систему:

$$\begin{cases} 60a + 12b = 167{,}75 \\ 12a + 8b = 10{,}33 \end{cases}$$

откуда находим $a = 3{,}625$, $b = -4{,}146$, то есть получаем функцию $y = 3{,}625x - 4{,}146$

Варианты индивидуальных заданий

X	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y1	–1,45	–1,247	–1,241	–0,766	–1,339	–1,988	–2,987	–5,626
Y2	–2,169	–0,974	–0,314	–0,312	2,92	5,046	9,411	22,835
Y3	0,484	0,282	1,482	1,301	1,919	0,176	–2,727	–12,96
Y4	–0,139	1,404	1,736	1,765	2,787	4,72	8,502	14,197
Y5	1,016	2,442	2,956	3,315	3,457	2,12	1,981	0,221
Y6	6,318	5,917	3,486	4,106	4,678	5,611	5,461	6,151
Y7	7,98	5,717	4,986	4,384	5,202	6,524	6,516	7,069
Y8	3,972	4,923	5,821	6,266	6,206	7,366	7,961	8,569
Y9	2,258	5,479	5,177	2,523	–0,364	0,259	–0,56	–1,376
Y10	–2,235	–1,237	1,766	1,816	1,137	0,799	0,273	–0,321
Y11	4,005	2,987	3,102	2,686	2,258	1,958	2,501	3,911
Y12	9,592	5,487	3,147	2,743	2,108	0,767	–2,732	–2,016
Y13	15,892	9,624	4,749	4,253	4,555	4,076	3,241	2,667
Y14	7,689	7,314	6,663	5,623	4,076	5,503	6,851	8,405
Y15	4,874	5,073	5,356	5,502	6,088	5,916	6,032	6,416
Y16	10,21	8,604	8,472	6,739	6,209	6,933	7,145	9,092
Y17	–2,839	–2,227	–2,609	–1,986	–0,829	–1,06	–3,941	–4,168
Y18	–3,388	–3,459	–2,191	–1,605	–1,433	–1,824	–2,591	–3,321
Y19	–3,831	–2,974	–2,876	–2,421	–2,209	–3,222	–4,333	–5,006
Y20	–5,315	–5,509	–4,679	–3,742	–2,848	–4,083	–5,688	–6,641
Y21	0,484	0,488	1,566	1,803	2,223	2,467	6,127	8,091
Y22	–2,245	–1,122	–0,177	0,523	–1,433	–1,459	–2,061	–5,344
Y23	–4,022	–2,387	–1,102	0,666	0,789	–1,118	–2,467	–4,933
Y24	–2,033	–1,974	–0,789	0,345	1,92	3,744	5,022	8,735
Y25	10,91	9,604	8,472	7,745	5,909	4,543	5,788	6,395
Y26	10,05	4,332	3,432	2,123	2,456	3,223	6,745	8,567
Y27	–6,343	–4,174	–1,789	0,345	–1,243	–2,454	–5,022	–6,735
Y28	4,022	2,387	2,102	0,666	1,789	2,118	2,467	4,933
Y29	5,344	3,522	1,177	-0,523	0,433	1,459	2,061	5,344
Y30	5,332	4,488	2,432	1,803	2,223	2,467	4,127	5,091

Критерий оценки

«5»	«4»	«3»	«2»
Решение верно, отчет оформлен верно по всем пунктам	Решение верно, отчет оформлен верно не по всем пунктам	Решение верно, отчет не оформлен	Решение неверно

Практическое занятие №9

Аппроксимация данных с использованием сплайнов

Проверяемые компетенции:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях;

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде;

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста;

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях;

ОК 08. Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности;

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках;

ПК 3.1 Осуществлять выбор готовых моделей искусственного интеллекта;

ПК 3.2 Формировать сценарии обучения готовых моделей искусственного интеллекта.

Аппроксимация данных с использованием сплайнов — это метод приближенного представления сложной зависимости гладкой кусочно-полиномиальной функцией (сплайном), которая сглаживает исходный набор точек, минимизируя влияние ошибок и шума в данных.

Что такое сплайн

- **Кусочно-полиномиальная структура**: Интервал исследования разбивается на более мелкие участки, на каждом из которых задается отдельный многочлен (чаще всего кубический).
- **Условия сглаживания**: На границах стыковки этих многочленов (узлах) обеспечивается непрерывность самой функции и ее производных.
- **Отличие от интерполяции**: В отличие от интерполяции, сплайн-аппроксимация не обязана проходить точно через каждую заданную точку, что позволяет эффективно работать с зашумленными экспериментальными данными.

Основные виды сплайнов для аппроксимации

- Кубический сплайн — использует многочлены третьей степени на каждом промежутке с согласованием первых и вторых производных в узлах, давая оптимальный баланс между гладкостью и гибкостью.
- B-сплайн (базисный сплайн) — представляет кривую как комбинацию базисных функций; отличается высокой численной устойчивостью, локальной модификацией формы и независимостью порядка от числа вершин.
- Сплайны Безье — широко применяются в компьютерной графике и CAD-системах для моделирования плавных кривых и контуров по контрольным точкам.

Этапы и методы построения

1. **Задание сетки и узлов**: Выбор расположения узлов сплайна (фиксированное или оптимизируемое).
2. **Составление системы уравнений**: Нахождение коэффициентов базисных функций через решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), часто с ленточными или симметричными положительно-определенными матрицами (методом Холецкого).
3. **Сглаживание (минимизация колебаний)**: Добавление штрафных функций для ограничения избыточной кривизны (например, минимизация интеграла от квадрата второй или k-й производной сплайна).

Варианты индивидуальных заданий

Задание: провести аппроксимацию сплайнами

1.	X	3	5	6	7	8	10	12	14
	Y	-0,9	5,4	8,8	7,8	3,3	-0,2	8,2	4,7

2.	X	-2	0	1	3	4	6	7	9	10
	Y	-6,5	-2,0	2,2	-1,3	-5,8	-3,4	1,3	0,1	-4,7

3.	X	-3	-1	2	4,5	7	10	12	14,5	17
	Y	7,0	7,7	7,8	8,0	7,4	7,3	7,3	7,9	7,9

4.	X	-3,3	-2,1	-0,9	0,5	1,5	2,7	4
	Y	-661,2	-93,0	-4,3	-0,8	-9,3	15,3	464

5.	X	0,5	2,8	5	7,4	10	12	14,3	16,6	19
	Y	4,0	9,4	13,7	11,2	15,0	15,5	13,0	17,0	15,5

6.	X	-4	-2,4	-1	1	2,4	4	5,6	7,2	9	11
	Y	9,6	11,0	8,7	5,3	8,3	12,7	13,4	11,3	12,8	16,2

7.	X	-4	-2,4	-0,2	1	2,4	3,6	6	7,2	9	12
	Y	-4,8	2,8	-5,0	-8,0	-5,3	2,2	2,3	-3,8	-1,1	5,2

8.	X	-3	-2,4	-2	-1	0,5	1	1,7	3	3,4
	Y	-6,9	-5,1	-2,8	4,1	7,8	6,5	4,6	13,2	23,2

9.	X	-4	-3	-2	-1	0,5	1	2,2	3	4
	Y	184,3	38,9	4,5	0,1	0,0	-0,1	-2,9	-9,7	-20,5

10.	X	-4	0,4	2	5	8,3	11	14,7	17	20
	Y	0,5	-2,6	0,3	-4,5	1,5	-3,9	1,9	-3,4	2,3

11.	X	1	3	4	7	9	10	12	14	20	21
	Y	4,1	-6,9	-4,6	5,3	-6,4	-5,9	5,9	1,0	2,9	-3,8

12.	X	1	2	5	8	9	11	13	14	15	16
	Y	1,1	2,5	0,9	1,6	0,0	2,0	0,0	1,6	0,9	0,6

13.	X	-6	-1	0	6	11	14	18	21	26	28
	Y	0,7	1,1	-1,0	0,7	2,0	1,6	2,4	1,3	2,4	0,4

14.	X	0,3	1,8	3,3	4,8	6,3	7,8	9,3	10,8	12,3	13,8
	Y	0,2	0,2	2,0	1,7	1,8	1,8	2,0	0,8	0,9	1,9

15.	X	-7,5	-4,2	-0,9	2,4	5,7	9	12,3	15,6	18,9
	Y	1,6	0,9	1,3	2,0	0,2	1,8	2,0	1,9	0,7

Критерий оценки

«5»	«4»	«3»	«2»
Решение верно, отчет оформлен верно по всем пунктам	Решение верно, отчет оформлен верно не по всем пунктам	Решение верно, отчет не оформлен	Решение неверно

Раздел 3. Численное дифференцирование и интегрирование

Тема 3.1. Численное дифференцирование

Практическое занятие №10

Реализация методов численного дифференцирования. Применение численного дифференцирования для анализа данных

Проверяемые компетенции:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях;

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде;

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста;

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях;

ОК 08. Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности;

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и

иностранном языках;

ПК 3.1 Осуществлять выбор готовых моделей искусственного интеллекта;

ПК 3.2 Формировать сценарии обучения готовых моделей искусственного интеллекта.

Численное дифференцирование — это вычисление производной функции на основе её значений в дискретных точках (например, из таблицы или результатов измерений) с использованием конечных разностей или интерполяционных полиномов.

Основные методы конечных разностей

1. **Левосторонняя разность** (аппроксимация назад):

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

- Погрешность: O(h) (первый порядок точности).

2. **Правосторонняя разность** (аппроксимация вперед):

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Погрешность: O(h) (первый порядок точности).

3. **Центральная (двусторонняя) разность** (повышенная точность):

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

- Погрешность: $O(h^2)$ (второй порядок точности). Университет ИТМО

4. **Вторая производная (центральная разность)**:

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

- Погрешность: $O(h^2)$.

Варианты индивидуальных заданий

Задание: вычислить производные по формулам Лагранжа

Вариант №1. 1. Численным методом по формулам Лагранжа найти приближенное значение первой и второй производной функции $f(x) = (3x^2 - 1)(x^3 + 2x)$ в точке x = 1,33.	***Вариант №2.*** 1. Численным методом по формулам Лагранжа найти приближенное значение первой и второй производной функции $f(x) = (4x^3 - 2)(x^2 + 1)$ в точке x = 2,46.
Вариант №3. 1. Численным методом по формулам Лагранжа найти приближенное значение первой и второй производной функции $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 3) + \frac{x+1}{2}$ в точке x = 1,72.	***Вариант №4.*** 1. Численным методом по формулам Лагранжа найти приближенное значение первой и второй производной функции $f(x) = (2x^2 - x)\sqrt{x+1}$ в точке x = 1,28.
Вариант №5. 1. Численным методом по формулам Лагранжа найти приближенное значение первой и второй	***Вариант №6.*** 1. Численным методом по формулам Лагранжа найти приближенное значение первой и второй

производной функции $f(x)=\frac{2}{x+1}+3x^2$ в точке x = 1,53.	производной функции $f(x)=(3x^3+5)(x+1)^2$ в точке x = 2,32.
Вариант №7. 1. Численным методом по формулам Лагранжа найти приближенное значение первой и второй производной функции $f(x)=\frac{3x}{x+2}-(2+x)^2$ в точке x = 2,34.	***Вариант №8.*** 1. Численным методом по формулам Лагранжа найти приближенное значение первой и второй производной функции $f(x)=(x^3-6x)(x-2)^2$ в точке x = 1,91.
Вариант №9. 1. Численным методом по формулам Лагранжа найти приближенное значение первой и второй производной функции $f(x)=(x^4+2)\frac{x}{3}$ в точке x = 2,08.	***Вариант №10.*** 1. Численным методом по формулам Лагранжа найти приближенное значение первой и второй производной функции $f(x)=(4x^2+2x)(x-1)^2$ в точке x = 2,76.
Вариант №11. 1. Численным методом по формулам Лагранжа найти приближенное значение первой и второй производной функции $f(x)=(x^2+3x+1)(x-1)$ в точке x = 1,93.	***Вариант №12.*** 1. Численным методом по формулам Лагранжа найти приближенное значение первой и второй производной функции $f(x)=(x+1)^2(2x^2-1)$ в точке x = 2,13.
Вариант №13. 1. Численным методом по формулам Лагранжа найти приближенное значение первой и второй производной функции $f(x)=(x^3+3)-\sqrt{x-1}$ в точке x = 2,52.	***Вариант №14.*** 1. Численным методом по формулам Лагранжа найти приближенное значение первой и второй производной функции $f(x)=(4x^3-3x)\sqrt{x}$ в точке x = 1,63.
Вариант №15. 1. Численным методом по формулам Лагранжа найти приближенное значение первой и второй производной функции $f(x)=\frac{4}{x^2}+(x^2-1)$ в точке x = 1,82.	***Вариант №16.*** 1. Численным методом по формулам Лагранжа найти приближенное значение первой и второй производной функции $f(x)=\frac{2}{x}-3x^2+\sqrt{x}$ в точке x = 1,68.

Критерий оценки

«5»	«4»	«3»	«2»
Решение верно, отчет оформлен верно по всем пунктам	Решение верно, отчет оформлен верно не по всем пунктам	Решение верно, отчет не оформлен	Решение неверно

Тема 3.2. Численное интегрирование

Практическое занятие №11

. Применение метода трапеций для численного интегрирования. Численное интегрирование методом Симпсона для оценки сложных интегралов

Проверяемые компетенции:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях;

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде;

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста;

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях;

ОК 08. Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности;

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках;

ПК 3.1 Осуществлять выбор готовых моделей искусственного интеллекта;

ПК 3.2 Формировать сценарии обучения готовых моделей искусственного интеллекта.

Формулы прямоугольников и трапеций для приближенного интегрирования:

- По левому краю -

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \left(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-1}) \right) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})$$

- По правому краю -

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \left(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_n) \right) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

- По центру -

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \left(f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \ldots + f\left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}\right) \right) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)$$

- Трапеций –

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

Варианты индивидуальных заданий

Задание: Вычислить определенный интеграл, используя методы прямоугольников (левых, правых и средних) и метод трапеций.

1. $\int_{-2}^{4}(2x^2-\sqrt{x+2})dx$ $n=6$ 2. $\int_{-3}^{0}(5x^2+x+1)dx$ $n=6$

3. $\int_{0}^{3}(3x^2-\sqrt{x})dx$ $n=6$ 4. $\int_{1}^{4}(x^3-\sqrt{x})dx$ $n=6$

5. $\int_{1}^{4}(7+x-2x^2)dx$ $n=6$ 6. $\int_{0}^{3}(7x^2-3\sqrt{x})dx$ $n=6$

7. $\int_{2}^{5}(2x^2-2-\sqrt{x})dx$ $n=6$ 8. $\int_{0}^{3}(5x^2+\sqrt{x})dx$ $n=6$

9. $\int_{-2}^{2}(x^3+1)dx$ $n=8$ 10. $\int_{0}^{4}(2x^2+1-\sqrt{x})dx$ $n=8$

11. $\int_{-2}^{2}(x^2+\sqrt{x+2}-1)dx$ $n=8$ 12. $\int_{0}^{2}(x^2+2+\sqrt{x})dx$ $n=8$

13. $\int_{1}^{3}(3x^2-x-1)dx$ $n=8$ 14. $\int_{-1}^{3}(x^3+2)dx$ $n=8$

15. $\int_{-2}^{2}(2x^2+1-\sqrt{x+4})dx$ $n=8$ 16. $\int_{1}^{4}(2x^2-1{,}5\sqrt{x})dx$ $n=6$

17. $\int_{1}^{4}(7\sqrt{x}+2x^2)dx$ $n=6$ 18. $\int_{0}^{3}(7x^2+3\sqrt{x})dx$ $n=6$

19. $\int_{2}^{5}(2x^2-2+\sqrt{x})dx$ $n=6$ 20. $\int_{0}^{3}(5x^2-1+\sqrt{x})dx$ $n=6$

21. $\int_{3}^{6}(x^2+4+\sqrt{x})dx$ $n=6$ 22. $\int_{2}^{6}(x^3+3)dx$ $n=8$

23. $\int_{0}^{3}(2x^2-1+\sqrt{x})dx$ $n=6$ 24. $\int_{-2}^{2}(3x^2+2\sqrt{x+2})dx$ $n=8$

25. $\int_{-2}^{2}(x^2+2\sqrt{x+2})dx$ $n=8$ 26. $\int_{-3}^{1}(x^2+2x-1{,}5)dx$ $n=6$

27. $\int_{-3}^{0}(3x^2+1+\sqrt{x+3})dx$ $n=6$ 28. $\int_{0}^{3}(3x^2+5+\sqrt{x})dx$ $n=6$

29. $\int_{1}^{4}(7x+x^2-\sqrt{x})dx$ $n=6$ 30. $\int_{0}^{3}(x^2-3\sqrt{x})dx$ $n=6$

Критерий оценки

«5»	«4»	«3»	«2»
Решение верно, отчет оформлен верно по всем пунктам	Решение верно, отчет оформлен верно не по всем пунктам	Решение верно, отчет не оформлен	Решение неверно

Раздел 4. Численные методы решения дифференциальных уравнений

Тема 4.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ)

Практическое занятие № 12

Решение ОДУ методом Эйлера

Проверяемые компетенции:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях;

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде;

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста;

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях;

ОК 08. Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности;

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках;

ПК 3.1 Осуществлять выбор готовых моделей искусственного интеллекта;

ПК 3.2 Формировать сценарии обучения готовых моделей искусственного интеллекта.

Метод Эйлера и Модифицированный метод Эйлера

Метод Эйлера является одним из самых простых методов решения дифференциальных уравнений первого порядка$dy/dx=f(x,y)$. Он в основном используется как учебный, в практических расчетах он дает значительную погрешность. Вычислительный алгоритм представляется следующим образом:

$$y_{i+1}=y(x_i+h)=y_i+hf(x_i,y_i)$$

где h – шаг по x (в общем случае может быть постоянным).

Запускается метод из начальных условий $y(x_0)=y_0$.

Пример.

Решить дифференциальное уравнение вида $y'=2x^2+2y$ при начальных условиях $x_0=0$, $y(x_0)=1$ с шагом $h=0,1$ на интервале $[0,1]$. Это уравнение имеет аналитическое решение $y=1,5e^{2x}-x^2-x-0,5$. Для контроля решения численным методом приведем наряду с численным и точное решение.

Первыйшаг: $y_1=y_0+hf(x_0,y_0)=1+0,1(2*0+2*1)=1,2$

Второйшаг: $y_2=y_1+hf(x_1,y_1)=1,2+0,1(2*0,1^2+2*1,2)=1,442$

Процесс вычислений по приведенной формуле не представляет трудностей,

поэтому приведем остальные результаты (через точку) в таблице 1.

Таблица 1.

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
Точное решение	1	1,4977	2,2783	3,5202	5,4895	8,5836
Приближенное решение	1	1,4420	2,1041	3,1183	4,6747	7,0472

Варианты индивидуальных заданий

Задание**:** решить дифференциальное уравнение модифицированным методом Эйлера

Вариант	Уравнение	X_0	Y_0	[a;b]
1	$y' = x + y$	0	0,8	[0;1]
2	$y' = x + \cos y$	1,8	2	[1,8;2,8]
3	$y' = e^x + y$	0	1,2	[0;1]
4	$y' = xy + \sin x$	0	2	[0;1]
5	$y' = xy + e^x$	-1	0,5	[-1;0]
6	$y' = e^{x+y}$	0	-1	[0;1]
7	$y' = x + y^2$	-2	0	[-2;-1]
8	$y' = \sin(x - y)$	1	3	[1;2]
9	$y' = \cos(x + y)$	2	0	[2;3]
10	$y' = y + \cos x$	2	0	[2;3]

Критерий оценки

«5»	«4»	«3»	«2»
Решение верно, отчет оформлен верно по всем пунктам	Решение верно, отчет оформлен верно не по всем пунктам	Решение верно, отчет не оформлен	Решение неверно

Практическое занятие № 13

Применение метода Рунге-Кутты для решения ОДУ в моделировании процессов

Проверяемые компетенции:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях;

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде;

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке

Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста;

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях;

ОК 08. Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности;

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках;

ПК 3.1 Осуществлять выбор готовых моделей искусственного интеллекта;

ПК 3.2 Формировать сценарии обучения готовых моделей искусственного интеллекта.

Метод Рунге-Кутты — это семейство численных методов для приближенного решения задач Коши (обыкновенных дифференциальных уравнений — ОДУ) и систем ОДУ.

Суть метода

Метод позволяет найти значение функции y в следующей точке $x_{n+1} = x_n + h$ (где h — шаг интегрирования), зная её значение в текущей точке y_n и уравнение вида:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

В отличие от простого метода Эйлера (который учитывает наклон только в начале отрезка), методы Рунге — Кутты делают несколько «пробных» шагов (стадий) на интервале $[x_n, x_n + h]$, чтобы точнее учесть изменение функции.

Классический метод Рунге — Кутты 4-го порядка (RK4)

Наиболее популярный вариант, обеспечивающий высокую точность (погрешность на один шаг имеет порядок $O(h^5)$, а общая погрешность на отрезке — $O(h^4)$): Корпоративный порт... +1

Переход от n-го шага к $(n + 1)$-му вычисляется по формулам:

- $k_1 = f(x_n, y_n)$
- $k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1 \right)$
- $k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_2 \right)$
- $k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$

Новое значение функции:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Варианты индивидуальных заданий

Задание: решить дифференциальное уравнение методом Рунге-Кутта

Вариант	Уравнение	X_0	Y_0	[a;b]
1	$y' = x + y$	0	0,8	[0;1]
2	$y' = x + \cos y$	1,8	2	[1,8;2,8]
3	$y' = e^x + y$	0	1,2	[0;1]
4	$y' = xy + \sin x$	0	2	[0;1]
5	$y' = xy + e^x$	-1	0,5	[-1;0]
6	$y' = e^{x+y}$	0	-1	[0;1]
7	$y' = x + y^2$	-2	0	[-2;-1]
8	$y' = \sin(x - y)$	1	3	[1;2]
9	$y' = \cos(x + y)$	2	0	[2;3]
10	$y' = y + \cos x$	2	0	[2;3]

Критерий оценки

«5»	«4»	«3»	«2»
Решение верно, отчет оформлен верно по всем пунктам	Решение верно, отчет оформлен верно не по всем пунктам	Решение верно, отчет не оформлен	Решение неверно

Тема 4.2. Краевые задачи

Практическое занятие № 14

Решение краевых задач с использованием разностных схем. Применение численных методов для решения краевых задач в задачах моделирования

Проверяемые компетенции:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях;

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде;

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста;

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять

знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях;

ОК 08. Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности;

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках;

ПК 3.1 Осуществлять выбор готовых моделей искусственного интеллекта;

ПК 3.2 Формировать сценарии обучения готовых моделей искусственного интеллекта.

Решение краевых задач с использованием разностных схем — это базовый метод вычислительной математики, позволяющий заменить дифференциальную задачу в непрерывной области на дискретную систему алгебраических уравнений.

Основные этапы метода

- **Построение сетки**:
  Вместо непрерывного интервала или области вводят дискретный набор точек — разностную сетку с шагом h (или шагами h_x, h_y в многомерном случае).
- **Замена производных разностными отношениями**:
  Производные в дифференциальном уравнении заменяются разностными аналогами:
  - *Правая (левая) разность*: $u'(x_i) \approx \frac{u_{i+1}-u_i}{h}$
  - *Центральная разность*: $u'(x_i) \approx \frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}$
  - *Вторая производная*: $u''(x_i) \approx \frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}$
- **Аппроксимация краевых условий**:
  Граничные условия (Дирихле, Неймана или Робена) также заменяются дискретными соотношениями в узлах границы.
- **Формирование системы уравнений**:
  Подстановка разностных аналогов в исходное уравнение в каждом внутреннем узле сетки приводит к системе линейных (или нелинейных) алгебраических уравнений (СЛАУ). Для уравнений второго порядка матрица этой системы обычно является трехдиагональной.
- **Решение СЛАУ**:
  Полученную систему решают численно (например, методом прогонки для трехдиагональных матриц или итерационными методами).

Основные понятия и свойства разностных схем

- **Аппроксимация**:
  Степень приближения разностного уравнения к исходному дифференциальному уравнению при стремлении шага сетки $h \to 0$. Разностная схема имеет порядок аппроксимации $O(h^p)$, если погрешность аппроксимации на точном решении есть величины порядка h^p.
- **Устойчивость**:
  Свойство разностной схемы, при котором малые погрешности входных данных или вычислений не нарастают катастрофически при решении.
- **Сходимость**:
  Приближение решения разностной задачи к точному решению дифференциальной задачи при $h \to 0$.
  - Согласно фундаментальной **теореме Лакса**, для линейных краевых задач и задач Коши **аппроксимация + устойчивость = сходимость**.

Решение краевых задач методом конечных разностей (с помощью

разностных схем) заключается в замене непрерывного дифференциального оператора дискретным аналогом на сетке. Это сводит задачу к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которую часто можно решить методом прогонки.

Пример решения краевой задачи

Постановка задачи

Рассмотрим простейшую линейную краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка на отрезке [0, 1] с первой краевой задачей (условиями Дирихле):

$$y'' - y = -x, \quad x \in [0, 1]$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

Шаг 1. Построение сетки

Разобьем отрезок $[0, 1]$ на N равных частей с шагом $h = \frac{1}{N}$. Пусть для примера $N = 4$, тогда шаг $h = 0.25$.
Узлы сетки:

$$x_i = i \cdot h, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.25, \quad x_2 = 0.5, \quad x_3 = 0.75, \quad x_4 = 1$$

Искомые значения функции в узлах обозначим как $y_i \approx y(x_i)$.

Шаг 2. Замена производных разностными отношениями

Вторую производную в уравнении заменим центральной разностной аппроксимацией со вторым порядком точности:

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}$$

Подставим это выражение в исходное уравнение $y'' - y = -x$ для внутреннего узла i ($i = 1, 2, 3$):

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - y_i = -x_i$$

Умножим уравнение на h^2 и приведем подобные слагаемые при y_i:

$$y_{i-1} - (2 + h^2)y_i + y_{i+1} = -h^2 x_i$$

При $h = 0.25$ имеем $h^2 = 0.0625$, поэтому коэффициент при y_i равен:

$$2 + h^2 = 2.0625$$

Шаг 3. Запись уравнений для каждого внутреннего узла

Учитывая граничные условия:

$$y_0 = 0, \quad y_4 = 0$$

Запишем систему уравнений для внутренних точек $i = 1, 2, 3$:

- **При $i = 1$ ($x_1 = 0.25$):**

$$y_0 - 2.0625y_1 + y_2 = -0.0625 \cdot 0.25$$

Так как $y_0 = 0$:

$$-2.0625y_1 + y_2 = -0.015625$$

- **При $i = 2$ ($x_2 = 0.5$):**

$$y_1 - 2.0625y_2 + y_3 = -0.0625 \cdot 0.5 = -0.03125$$

- **При $i = 3$ ($x_3 = 0.75$):**

$$y_2 - 2.0625y_3 + y_4 = -0.0625 \cdot 0.75$$

Так как $y_4 = 0$:

$$y_2 - 2.0625y_3 = -0.046875$$

Шаг 4. Решение полученной системы уравнений

Мы получили трехдиагональную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2.0625y_1 + 1.0000y_2 + 0 \cdot y_3 = -0.015625 \\ 1.0000y_1 - 2.0625y_2 + 1.0000y_3 = -0.03125 \\ 0 \cdot y_1 + 1.0000y_2 - 2.0625y_3 = -0.046875 \end{cases}$$

Эту систему можно решать методом Гаусса или эффективным Метод конечных разностей — **трехточечной прогонкой**.

Результаты расчета приближенных значений y_i:

- $y_0 = 0.0000$
- $y_1 \approx 0.0396$
- $y_2 \approx 0.0660$
- $y_3 \approx 0.0396$
- $y_4 = 0.0000$

Критерий оценки

«5»	«4»	«3»	«2»
Решение верно, отчет оформлен верно по всем пунктам	Решение верно, отчет оформлен верно не по всем пунктам	Решение верно, отчет не оформлен	Решение неверно

Раздел 5. Численные методы для оптимизации

Тема 5.1. Градиентные методы оптимизации

Практическое занятие № 15

Реализация метода градиентного спуска для оптимизации функций

Проверяемые компетенции:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации

и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях;

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде;

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста;

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях;

ОК 08. Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности;

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках;

ПК 3.1 Осуществлять выбор готовых моделей искусственного интеллекта;

ПК 3.2 Формировать сценарии обучения готовых моделей искусственного интеллекта.

Градиентный спуск — это итерационный численный метод поиска локального минимума дифференцируемой функции.

Основная идея

- **Градиент** функции ($\nabla f(x)$) показывает направление её наискорейшего роста.
- **Антиградиент** ($-\nabla f(x)$) указывает направление наискорейшего убывания функции.
- Алгоритм движется в сторону антиградиента шагами определенной длины, приближаясь к точке минимума. Википедия

Формула обновления параметров

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$$

где:

- x_k — текущее положение точки на шаге k.
- $\nabla f(x_k)$ — градиент функции в точке x_k.
- α_k (также обозначается как λ или *learning rate*) — размер шага (темп обучения). Skillfactory media +3

Основные виды градиентного спуска

- **Классический (пакетный) градиентный спуск**: градиент вычисляется по всей доступной выборке или наборе данных за одну итерацию.
- **Стохастический градиентный спуск (SGD)**: градиент вычисляется на каждом шаге по одному случайно выбранному примеру, что ускоряет расчеты, но добавляет шум в траекторию движения. Университет ИТМО
- **Мини-батч (Mini-batch) градиентный спуск**: компромиссный вариант, где градиент считается на небольшом случайном подмножестве (батче) данных. Skillfactory media
- **Метод наискорейшего спуска**: размер шага α_k на каждой итерации оптимизируется точно (например, путем одномерного поиска). MachineLearning.ru +2

Проблемы метода и пути их решения

- **Подбор темпа обучения (α)**:
  - Если шаг слишком большой, метод может перепрыгнуть минимум или начать расходиться.
  - Если шаг слишком маленький, сходимость будет крайне медленной. MachineLearning.ru
- **Застревание в локальных минимумах и седловых точках**: решением служат методы с моментумом (*Momentum*, *Adam*), случайная инициализация или добавление шума. DeepMachineLearnin... +2
- **Овражные функции**: на вытянутых рельефах стандартный спуск «бьется о стенки» оврага; эту проблему решают адаптивные методы оптимизации (например, *Adam*, *RMSprop* или сопряженные градиенты). Хабр +2

Пример

Возьмем простую выпуклую функцию одной переменной:

$$f(x) = x^2$$

Наша цель — найти её минимум ($x^* = 0$).

1. **Производная функции** (градиент):

$$\nabla f(x) = f'(x) = 2x$$

2. **Параметры запуска**:
   1. Начальная точка: $x_0 = 5$
   2. Скорость обучения (шаг): $\alpha = 0.1$
3. **Итерации алгоритма**:
   1. **Шаг 1 ($k = 0$)**:
      - Вычисляем градиент: $f'(x_0) = 2 \cdot 5 = 10$
      - Обновляем точку: $x_1 = 5 - 0.1 \cdot 10 = 5 - 1 = 4$
      - Значение функции: $f(4) = 16$
   2. **Шаг 2 ($k = 1$)**:
      - Градиент: $f'(x_1) = 2 \cdot 4 = 8$
      - Новая точка: $x_2 = 4 - 0.1 \cdot 8 = 4 - 0.8 = 3.2$
      - Значение функции: $f(3.2) = 10.24$
   3. **Шаг 3 ($k = 2$)**:
      - Градиент: $f'(x_2) = 2 \cdot 3.2 = 6.4$
      - Новая точка: $x_3 = 3.2 - 0.1 \cdot 6.4 = 3.2 - 0.64 = 2.56$

С каждым новым шагом значение x_k всё ближе подбирается к нулю — точке минимума.

Важные нюансы выбора шага (α)

- **Слишком большой шаг** (α близка к 1 или больше): алгоритм «перепрыгивает» минимум, функция расходится.
- **Слишком маленький шаг** (например, $\alpha = 0.0001$): метод сходится очень медленно, требуются тысячи итераций. MachineLearning.ru +2

Критерий оценки

«5»	«4»	«3»	«2»
Решение верно, отчет оформлен верно по всем пунктам	Решение верно, отчет оформлен верно не по всем пунктам	Решение верно, отчет не оформлен	Решение неверно

Практическое занятие № 16

Применение стохастического градиентного спуска для больших наборов данных

Проверяемые компетенции:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях;

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде;

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста;

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

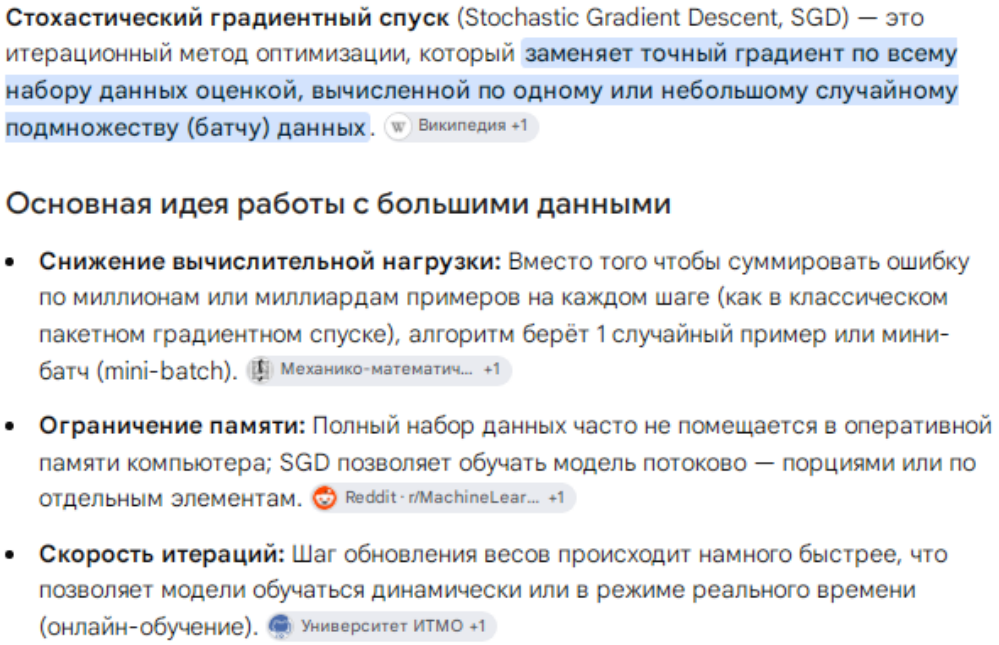
ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях;

ОК 08. Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности;

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках;

ПК 3.1 Осуществлять выбор готовых моделей искусственного интеллекта;

ПК 3.2 Формировать сценарии обучения готовых моделей искусственного интеллекта.



Стохастический градиентный спуск (SGD) — это метод оптимизации, который обновляет веса модели не по всему датасету сразу, а на основе одного или небольшого случайного набора (mini-batch) элементов за один шаг. Это позволяет эффективно работать с огромными объемами данных, где классический градиентный спуск требует слишком много памяти и времени.

Пример задачи: Линейная регрессия на больших данных

Представьте, что у нас есть датасет из 10 000 000 строк о продаже квартир (площадь -> цена). Загрузить всю матрицу в операционную память или считать сумму градиентов по 10 млн строк на каждой эпохе тяжело.

Как работает SGD здесь:

1. Выбираем случайную квартиру (или мини-партию из 32/64 квартир).
2. Считаем предсказание модели для этой квартиры.
3. Вычисляем ошибку (функцию потерь).
4. Делаем шаг обновления весов в сторону уменьшения ошибки.
5. Повторяем для следующего случайного примера.

Пример кода на Python (с использованием Scikit-learn)

Библиотека scikit-learn имеет встроенный класс для работы с большими датасетами по методу SGD:

```
from sklearn.linear_model import SGDRegressor
from sklearn.preprocessing import StandardScaler
from sklearn.pipeline import make_pipeline
import numpy as np

# Имитация большого набора данных (10 млн строк, 10 признаков)
# В реальности данные могут подаваться порциями (chunks) через partial_fit
X_train = np.random.rand(100000, 10)
y_train = np.dot(X_train, np.array([1.5, -2.0, 3.1, 0.5, 0.0, 1.2, -1.0, 0.4, 2.1,

# Создаем конвейер с масштабированием и SGD-регрессором
model = make_pipeline(StandardScaler(), SGDRegressor(max_iter=1000, tol=1e-3, lear

# Обучение модели
model.fit(X_train, y_train)

# Для потоковых данных (когда датасет не влезает в RAM) используют метод .partial_
```

Критерий оценки

«5»	«4»	«3»	«2»
Решение верно, отчет оформлен верно по всем пунктам	Решение верно, отчет оформлен верно не по всем пунктам	Решение верно, отчет не оформлен	Решение неверно

Тема 5.2. Методы многомерной оптимизации

Практическое занятие № 17

Применение метода Ньютона для оптимизации многомерных функций

Проверяемые компетенции:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации

и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях;

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде;

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста;

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях;

ОК 08. Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности;

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках;

ПК 3.1 Осуществлять выбор готовых моделей искусственного интеллекта;

ПК 3.2 Формировать сценарии обучения готовых моделей искусственного интеллекта.

Метод Ньютона для многомерной оптимизации — это итерационный алгоритм поиска минимума или максимума функции нескольких переменных, использующий первые и вторые производные (градиент и матрицу Гессе). DeepMachineLearning.ru

---

Основная формула метода

Для минимизации функции $f(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_D)^T$, новое приближение точки $\mathbf{x}_{k+1}$ вычисляется по формуле: DeepMachineLearning.ru

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - [H_f(\mathbf{x}_k)]^{-1} \nabla f(\mathbf{x}_k)$$

Где:

- $\nabla f(\mathbf{x}_k)$ — вектор градиента функции в точке $\mathbf{x}_k$.
- $H_f(\mathbf{x}_k)$ — матрица Гессе (матрица вторых частных производных) размером $D \times D$ в точке $\mathbf{x}_k$. DeepMachineLearning.ru

Пошаговый пример применения

1. Постановка задачи

Нужно найти точку локального минимума квадратичной функции двух переменных:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 - 3x_1 - 4x_2$$

В качестве начального приближения выберем точку:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

---

2. Вычисление градиента (вектора первых производных)

Находим частные производные первого порядка:

- $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2 - 3$
- $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_2 + x_1 - 4$

Вектор градиента $\nabla f(\mathbf{x})$:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - 3 \\ x_1 + 4x_2 - 4 \end{pmatrix}$$

Вычисляем значение градиента в начальной точке $\mathbf{x}_0 = (0, 0)^T$:

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 2(0) + 0 - 3 \\ 0 + 4(0) - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

---

3. Вычисление матрицы Гессе (вторых производных)

Находим вторые частные производные:

- $\frac{\partial^2 f0}{\partial x_1^2} = 2$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 1$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 1$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 4$

Матрица Гессе $H_f(\mathbf{x})$ постоянна для этой квадратичной функции:

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Обращение матрицы Гессе

Находим обратную матрицу H_f^{-1}. Определитель матрицы $\det(H_f) = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 7$

.

$$H_f^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

---

5. Первая итерация метода Ньютона ($\mathbf{x}_1$)

Применяем итерационную формулу:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - H_f^{-1}\nabla f(\mathbf{x}_0)$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Вычисляем произведение матрицы на вектор:

- Перманентная строка 1: $\left(\frac{4}{7} \cdot (-3)\right) + \left(-\frac{1}{7} \cdot (-4)\right) = -\frac{12}{7} + \frac{4}{7} = -\frac{8}{7}$
- Перманентная строка 2: $\left(-\frac{1}{7} \cdot (-3)\right) + \left(\frac{2}{7} \cdot (-4)\right) = \frac{3}{7} - \frac{8}{7} = -\frac{5}{7}$

Получаем:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8/7 \\ -5/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/7 \\ 5/7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.143 \\ 0.714 \end{pmatrix}$$

Поскольку функция квадратичная, метод Ньютона находит точный минимум ровно за **1 шаг**. Проверка градиента в точке $\mathbf{x}_1$: DeepMachineLearning.ru

- $2(8/7) + (5/7) - 3 = 16/7 + 5/7 - 21/7 = 0$
- $(8/7) + 4(5/7) - 4 = 8/7 + 20/7 - 28/7 = 0$

Градиент равен нулю, значит, точка $\mathbf{x}_1 = \left(\frac{8}{7}, \frac{5}{7}\right)^T$ является точкой минимума.

Этапы алгоритма:

1. Выбор начальной точки: Определяется стартовая точка . Близость к экстремуму ускоряет сходимость.
2. Вычисление производных:
   - Градиент — направление наибольшего изменения функции.
   - Гессиан — матрица кривизны функции.
3. Обновление точки: Формула корректирует шаг с учётом кривизны функции.
4. Проверка условия остановки:
   - градиент близок к нулю.
   - малое изменение функции между итерациями.
5. Повторение: Если условие не выполнено, повторить с новой точки .

Пример:

Найти минимум функции .

- Градиент:
- Гессиан:

Итерация:

Начальная точка.

Минимум найден за одну итерацию, так как функция квадратична.

Ниже приведена программа, реализующая алгоритм решения задачи методом ньютона, написанная на языке программирования Python:

```
import numpy as np
```

```
# Определяем функцию
def f(x):
    return x**2 - 4*x + 4
# Определяем первую производную (градиент)
defgrad_f(x):
    return 2*x - 4
# Определяем вторую производную (гессиан)
def hessian_f(x):
    return 2
# Метод Ньютона
def newton_method(x0, tol=1e-6, max_iter=100):
    x = x0
    for i in range(max_iter):
        grad = grad_f(x)
        hessian = hessian_f(x)
        if abs(grad) < tol:
            print(f"Найдено решение на {i+1}-й итерации: x = {x}")
            return x
        x = x - grad / hessian
    print("Превышено максимальное число итераций")
    return x
# Начальная точка
x0 = 0
# Запуск метода Ньютона
solution = newton_method(x0)
print (f"Минимум функции: x = {solution}, f(x) = {f(solution)}")
```

Результат выполнения программы:

Найдено решение на 1-й итерации: x = 2.0

Минимум функции: x = 2.0, f(x) = 0.0

Описание программы

1. Программа задаёт начальную точку .
2. Вычисляются градиент и гессиан в каждой итерации.
3. Если модуль градиента становится меньше заданного порога , процесс останавливается, и программа выводит результат.

В данном примере решение было найдено за одну итерацию, поскольку функция квадратичная, и метод Ньютона быстро сходится на таких функциях.

Критерий оценки

«5»	«4»	«3»	«2»
Решение верно, отчет оформлен верно по всем пунктам	Решение верно, отчет оформлен верно не по всем пунктам	Решение верно, отчет не оформлен	Решение неверно

Практическое занятие № 18

Оптимизация многомерных функций с ограничениями

Проверяемые компетенции:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях;

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде;

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста;

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях;

ОК 08. Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности;

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках;

ПК 3.1 Осуществлять выбор готовых моделей искусственного интеллекта;

ПК 3.2 Формировать сценарии обучения готовых моделей искусственного интеллекта.

Оптимизация многомерных функций с ограничениями — это задача поиска наилучшего значения целевой функции f(x) (минимума или максимума) от нескольких переменных при выполнении заданных условий (равенств и неравенств).

Постановка задачи

Ищем экстремум функции $f(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^T$, при соблюдении ограничений:

- Ограничения-равенства: $g_i(\mathbf{x}) = c_i$
- Ограничения-неравенства: $h_j(\mathbf{x}) \geq d_j$ (или $\leq$) Википедия

Основные методы решения

1. Методы для ограничений в виде равенств

- **Метод подстановки**: Выражение части переменных через другие с помощью уравнений связи, что позволяет снизить размерность задачи и перейти к безусловной оптимизации. Википедия
- **Метод множителей Лагранжа**: Построение функции Лагранжа:

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum \lambda_i (g_i(\mathbf{x}) - c_i)$$

Экстремум ищется путем приравнивания частных производных функции Лагранжа по всем переменным к нулю. Википедия

2. Методы для ограничений в виде неравенств

- **Условия Каруна — Куна — Таккера (ККТ)**: Расширение метода Лагранжа на задачи с неравенствами. Они задают необходимые (а при выпуклости — и достаточные) условия оптимальности. Википедия
- **Линейное и нелинейное программирование**:
  - Для линейных задач — **Симплекс-метод**.
  - Для нелинейных — методы проэктивного градиентного спуска, барьерные и штрафные функции, квадратичное программирование. MachineLearning.ru +2
- **Численные и итерационные методы**:
  - Проекция градиента (шаг градиентного спуска проецируется обратно на допустимую область).
  - Методы штрафных функций (добавление к целевой функции слагаемого, наказывающего за выход за пределы допустимой области). Хабр

Пример

Постановка задачи

Найти точки условного экстремума функции:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

при ограничении-равенстве:

$$g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 2 = 0$$

Решение методом Лагранжа

1. Составляем функцию Лагранжа

Добавляем ограничение с множителем Лагранжа λ:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda \cdot g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 2)$$

2. Находим частные производные первого порядка

Приравниваем их к нулю, чтобы получить систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 2 = 0 \end{cases}$$

3. Решаем систему уравнений

Из первых двух уравнений выражаем x_1 и x_2:

$$2x_1 = -\lambda \Longrightarrow x_1 = -\frac{\lambda}{2}$$

$$2x_2 = -\lambda \Longrightarrow x_2 = -\frac{\lambda}{2}$$

Следовательно:

$$x_1 = x_2$$

Подставляем это равенство в третье уравнение ограничения:

$$x_1 + x_1 - 2 = 0 \Longrightarrow 2x_1 = 2 \Longrightarrow x_1 = 1$$

Так как $x_1 = x_2$, получаем:

$$x_2 = 1$$

Находим множитель Лагранжа λ:

$$2(1) + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -2$$

4. Ответ

- Единственная стационарная точка: $\mathbf{(1, 1)}$.
- Значение целевой функции в этой точке:

$$f(1, 1) = 1^2 + 1^2 = 2$$

Это точка условного минимума.

Варианты индивидуальных заданий

Задачи

1. Найти экстремум функции:

1) $f(x) = \cos^3 x + \sin^3 x$ при $x \in E_1$;
2) $f(x) = (1 + x^2)e^{-x^2}$ при $x \in E_1$;
3) $f(x) = (x^2 - 3x + 2)/(x + 1)^2$ на отрезке $[-2, 2]$;
4) $f(x) = x - 2\sin x$ при $x \in [0, +\infty)$;
5) $f(x) = x^{2/3}e^{-x}$ при $x \in [-1, +\infty)$;
6) $f(x) = |x|e^{-|x|}$ при $x \in [-2, 2]$;
7) $f(x) = x\sqrt[3]{x - 1}$ при $x \in [-7, 2]$;
8) $f(x) = x\sqrt[3]{|x| - 1}$ при $x \in [-7, 2]$;
9) $f(x) = x(x - 2)^{2/3}$ при $x \in [-1, +\infty)$.

Задачи

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на множестве X:

1) $f(x) = x_1x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 + x_1$,
$X = \{x \mid x_1 \in [0,1],\ x_2 \in [0,1]\}$;

2) $f(x) = x_1^3 - 4x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$,
$X = \{x \mid |x_1| \le 5,\ |x_2| \le 1\}$;

3) $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$,
$X = \{x \mid x_1 \in [0,2],\ x_2 \in [-1,2]\}$;

4) $f(x) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 7)^2$,
$X = \{x \mid x_1 + 2x_2 \le 12,\ x_1 + x_2 \le 9,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\}$;

5) $f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2$,
$X = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 \le 10,\ 2x_1 + 2x_2 = 5\}$;

6) $f(x) = x_1(\pi - x_1)\sin x_2 + x_2 \cos x_1$,
$X = \{x \mid x_1 \in [0,\pi],\ x_2 \ge 0\}$;

7) $f(x) = x_1 + x_2 + x_3$,
$X = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 \le x_3,\ x_3 \le 1\}$;

8) $f(x) = 2x_1x_2 + x_3$,
$X = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 = 1,\ 0 \le x_3 \le 2x_1 + 1\}$;

9) $f(x) = x_1^2 - x_2^2$,
$X = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 \le 16\}$;

10) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 12x_1 + 16x_2$,
$X = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 \le 25\}$;

11) $f(x) = \operatorname{arctg} x_1 - \ln x_2$,
$X = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 \le 4,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 1\}$;

12) $f(x) = x_1 + x_2 - x_3$,
$X = \{x \mid x_1x_2x_3 \le 1,\ -x_1 + x_2 - x_3 \le 0\}$;

Критерий оценки

«5»	«4»	«3»	«2»
Решение верно, отчет оформлен верно по всем пунктам	Решение верно, отчет оформлен верно не по всем пунктам	Решение верно, отчет не оформлен	Решение неверно

4. Контрольно-оценочные материалы для промежуточной аттестации по учебной дисциплине – ОП.04 «Численные методы».

Теоретические вопросы на экзамен:

1. Понятие об алгебраических и трансцендентных уравнениях
2. Графические методы численного решения алгебраических и трансцендентных уравнений
3. Понятие интервала изоляции корня уравнения
4. Численное решение алгебраических уравнений методом половинного деления
5. Численное решение алгебраических и трансцендентных уравнений методом хорд
6. Численное решение алгебраических и трансцендентных уравнений методом касательных
7. Численное решение алгебраических и трансцендентных уравнений методом итераций
8. Метод Гаусса: прямой и обратный ход метода
9. Итерация для линейных систем. Условие сходимости итерационного процесса
10. Итерация Якоби и Гаусса-Зейделя
11. Интерполяция методом Лагранжа
12. Применение интерполяции для восстановления недостающих данных
13. Метод наименьших квадратов для аппроксимации данных
14. Сплайновая аппроксимация
15. Численное дифференцирование функции одной переменной (формула Лагранжа)
16. Численное интегрирование: формулы прямоугольника
17. Квадратурные методы: метод трапеций, метод Симпсона
18. Численное интегрирование методом Ньютона-Котеса
19. Численные методы решения дифференциальных уравнений: метод Эйлера
20. Модифицированный метод Эйлера решения дифференциальных уравнений
21. Численные методы решения дифференциальных уравнений: метод Рунге-Кутта
22. Разностные схемы для решения краевых задач
23. Метод градиентного спуска и его вариации
24. Стохастический градиентный спуск для больших наборов данных
25. Методы Ньютона для многомерных функций
26. Методы оптимизации с ограничениями

Практические задания на экзамен:

1. Найти приближенное значение корня уравнения методом половинного деления:

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

2. Найти приближенное значение корня уравнения методом касательных: $x^2 - \frac{2}{x} = 0$

3. Найти приближенное значение корня уравнения методом касательных**:** $x^2 - x - 2 = 0$

4. Найти приближенное значение корня уравнения методом хорд: $x^2 - 3x + 2 = 0$

5. Найти приближенное значение корня уравнения методом хорд: $5 - x - \frac{4}{x} = 0$

6. Найти приближенное значение корня уравнения методом итераций: $x^2 - \frac{2}{x} = 0$

7. Численным методом по формулам Лагранжа найти приближенное значение первой и второй производной функции $f(x) = 2x^2 - x$ в точке x = 1,28

8. Численным методом по формулам Лагранжа найти приближенное значение первой и второй производной функции $f(x) = 3x^3 + 5$ в точке x = 2,32

9. Вычислите интеграл по формуле Ньютона-Котеса при n=1 и k=4: $\int_0^1 (1 + x + x^3)dx$

10. Вычислите интеграл по формуле Ньютона-Котеса при n=1 и k=4: $\int_0^1 \frac{2}{1+x^3}dx$

11. Вычислите интеграл по формулам прямоугольников и трапеций при n=4

$$\int_1^3 \sqrt{x-1}dx$$

12. Вычислите интеграл по формулам прямоугольников и трапеций при n=4

$$\int_0^{1,5} (1 + x + x^4)dx$$

13. Решить методом Рунге-Куттадифференциальное уравнение вида y’=x^2+упри начальных условиях x_0=1, y(x_0)=0 с шагом h=0,2 на интервале [1;2]

14. Решить методом Рунге-Кутта дифференциальное уравнение вида y’=x+y^2 при начальных условиях x_0=-2, y(x_0)=0с шагом h=0,2 на интервале [-2;-1]

15. Решить модифицированным методом Эйлера дифференциальное уравнение вида y’=2xy при начальных условиях x_0=0, y(x_0)=1 с шагом h=0,2 на интервале [0;1]

16. Решить модифицированным методом Эйлера дифференциальное уравнение вида y’=x+y при начальных условиях x_0=0, y(x_0)=0,8 с шагом h=0,2 на интервале [0;1]

Пример экзаменационного билета

ОДОБРЕНО Цикловой комиссией Программирования Протокол №____ от _____ _____ С.Н. Сулавко	**Экзаменационный билет** **по дисциплине** **«Численные методы»** **для специальности 09.02.13 «Интеграция решений с применением технологий искусственного интеллекта»** **III семестр** **Вариант №1**	**УТВЕРЖДАЮ** Заместитель директора по УМР И.В. Подцатова _____ «_____» _____ 2026г.

Теоретическая часть

1. Графические методы численного решения алгебраических и трансцендентных уравнений
2. Понятие интервала изоляции корня уравнения

Практическая часть

1. Найти приближенное значение корня уравнения методом половинного деления:

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

«____»_____ 2026г. Преподаватель _____

Лист согласования

Дополнения и изменения к комплекту ФОС на учебный год

Дополнения и изменения к комплекту ФОС на _____ учебный год по дисциплине _____ комплект ФОС внесены следующие изменения:

_____

_____

_____

_____

_____

Дополнения и изменения в комплекте ФОС обсуждены на заседании ЦК _____ Протокол № _____ от «_____» _____ 20_____г.

Председатель ЦК